Devoir maison n° 5

À rendre le jeudi 16 novembre 2023

Exercice 1 : Une bijection et sa réciproque

Extrait du DS n° 3 de l'an passé.

Montrer que $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{\sqrt{x}}{2}$ est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ et expliciter sa réciproque.

Exercice 2 : Image d'une partie par une application

Soient E et F deux ensembles non vides et $f : E \longrightarrow F$ une application.

Soient A une partie de E et $y \in F$. Rappelons que, par définition de l'image d'une partie par une application, on a $y \in f(A)$ si et seulement si il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$.

1) Soient A et B dans $\mathscr{P}(E)$.
   a) Montrer que, si $A \subset B$, alors $f(A) \subset f(B)$.
   b) Montrer que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
   c) Montrer que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
2) a) Supposons que f soit injective. Montrer que
$$\forall (A,B) \in \mathscr{P}(E)^2, \qquad f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B).$$
   b) Réciproquement supposons que, pour tout $(A,B) \in \mathscr{P}(E)^2$, $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$. Montrer que f est injective.
3) Dans cette question, on suppose que $E = F$ et on se donne $A \in \mathscr{P}(E)$.
   a) On suppose que f est surjective. Montrer que $\overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$.
   b) On suppose que f est injective. Montrer que $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.
   On pourra raisonner par l'absurde (après avoir traduit cette inclusion en terme d'implication).

Exercice 3 : Don't lose my number

Extrait du DS n° 3 de l'an passé.

En France, un numéro de téléphone portable est une liste ordonnée de 10 chiffres dont le premier est 0, le deuxième est 6 ou 7 et les huit suivants sont quelconques [1].

A chaque question, on demande une brève justification. Dans les questions 1 et 4, on simplifiera au maximum le résultat (il sera donc présenté sous forme d'un entier naturel). En revanche, dans les questions 2 et 3, on ne demande pas de simplifier les formules.

1) Combien y a-t-il de numéros de téléphone portable possibles ?
2) Combien y a-t-il de numéros de téléphone portable
   a) dont les dix chiffres sont distincts ?
   b) dont les huit derniers chiffres sont distincts ?

1. Ainsi, dans tout cet exercice, il suffira de compter les configurations de ces huit derniers chiffres et de multiplier le résultat par 2 (puisqu'une configuration xxxxxxxx pourra donner le numéro 06xxxxxxxx et 07xxxxxxxx).

3) Combien y a-t-il de numéros de téléphone portable
   a) avec au moins le chiffre 9 ?
   b) avec exactement trois fois le chiffre 9 ?
   c) avec exactement trois fois le chiffre 9 **et** exactement deux fois le chiffre 1 ?
   d) avec exactement trois fois le chiffre 9 **ou** exactement deux fois le chiffre 1 ?

4) Combien y a-t-il de numéros de téléphone portable
   a) qui sont des palindromes [1] ?
   b) dont les huit derniers chiffres forment une anagramme [2] de 20222023 ?
   c) qui diffèrent du numéro 0620222023 d'un seul [3] chiffre ?
   d) dont les huit derniers chiffres sont rangés dans l'ordre strictement croissant [4] ?
   e) avec uniquement des 0 et des 6 ?

---

1. Un palindrome est un numéro qui est identique qu'on le lise de gauche à droite ou de droite à gauche (par exemple 0721881270). On remarque qu'un tel numéro se termine forcément par 60 ou 70.
2. Par exemple 0623222002.
3. C'est-à-dire, à part un seul des 9 chiffres n'étant pas le premier 0 (attention le premier 6 ne peut devenir que 7), les huit autres sont exactement les mêmes à la même place. Par exemple 0620212023 diffère de 0620222023 d'un seul chiffre.
4. Par exemple : 0601235679.