Devoir maison n° 2

À rendre le lundi 2 octobre 2023

*Ce devoir est **individuel** et **obligatoire**. Si vous n'arrivez pas à traiter une question, demandez de l'aide à vos camarades ou à moi même et, si vous n'y arrivez vraiment pas, je préfère que vous ne traitiez pas la question plutôt que de la recopier sur quelqu'un d'autre.*

Rédigez sur une copie double lisiblement et proprement. Laissez une marge à gauche, écrivez à l'encre bleue ou noire et encadrez ou soulignez les résultats principaux.

Veuillez apporter un soin particulier à la rédaction, à la rigueur et aux raisonnements. Tout résultat doit être justifié. N'oubliez pas d'introduire toutes les variables que vous utilisez.

Exercice 1 : Questions en vrac

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer en fonction de n la somme
$$S_n = \sum_{k=2}^{2n+1} \frac{(-1)^{7k-5}\, 2^{3k-6}}{\sqrt{9^{k-2}}}.$$
On écrira le résultat sous la forme $r(1-s^n)$ avec r et s des rationnels à déterminer et écrits sous forme irréductible.
2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer en fonction de n la somme
$$T_n = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{i^3}{j^2}.$$
On donnera une expression sous forme polynomiale factorisée au maximum.
3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la somme
$$\sum_{j=0}^{n-1} \left(\binom{n}{j+1} 2^j - 3^{n-j-1} \right).$$
On doit trouver un réel indépendant de n.

Exercice 2 : Somme des puissances $p^{\text{ièmes}}$

Adapté du DS n° 1 de l'an passé.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$, notons $S_p(n) = \sum_{i=0}^{n} i^p$.

⚠ *Dans cet exercice, nous oublions que ces sommes ont été vues en cours ou en exercice dans les cas où $p \in \{1; 2; 3\}$. L'objectif de cet exercice est de redémontrer autrement ces formules (et d'en montrer d'autres). Leurs valeurs ne peuvent donc pas être utilisées dans cet exercice (du moins jusqu'à ce qu'elles soient démontrées dans l'exercice bien sûr).*

1) Écrire une fonction en Python qui prend en entrée les entiers naturels p et n et qui calcule $S_p(n)$.
2) Donner la valeur de $S_0(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3) Soit $n \in \mathbb{N}$.
   a) Développer $(i+1)^2 - i^2$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. En déduire une expression de la somme $\sum_{i=0}^{n} \left((i+1)^2 - i^2\right)$ en fonction de $S_0(n)$ et de $S_1(n)$.
   b) En calculant cette somme autrement, retrouver la valeur de $S_1(n)$.

4) Soit $n \in \mathbb{N}$.

a) Développer $(i+1)^3 - i^3$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. En déduire une expression de la somme $\sum_{i=0}^{n} \left((i+1)^3 - i^3\right)$ en fonction de $S_0(n)$, $S_1(n)$ et de $S_2(n)$.

b) En calculant cette somme autrement, montrer que $S_2(n) = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

5) Nous allons généraliser[1] cette approche. Fixons $p \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$.

a) Soit $i \in \mathbb{N}$. Écrire $(i+1)^{p+1} - i^{p+1}$ sous forme de somme (d'une seule somme).

b) En déduire que

$$(n+1)^{p+1} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p+1}{k} S_k(n).$$

c) En déduire que

$$S_p(n) = \frac{1}{p+1}\left((n+1)^{p+1} - (n+1) - \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p+1}{k} S_k(n)\right).$$

d) Montrer par le calcul que

$$n(n+1)\sum_{k=0}^{p-1} \binom{p}{k+1} n^k = (n+1)^{p+1} - (n+1).$$

On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall p \in \mathbb{N}, \qquad S_p(n) = \frac{1}{p+1}\left(n(n+1)\sum_{k=0}^{p-1} \binom{p}{k+1} n^k - \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p+1}{k} S_k(n)\right) \qquad (\square)$$

6) En utilisant la formule $(\square)$, montrer que $S_3(n) = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

7) a) En utilisant la formule $(\square)$, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_4(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}.$$

b) Est-il possible de factoriser encore l'expression ci-dessus ?

8) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, posons $T_p(n) = \dfrac{(p+1)!}{n(n+1)} S_p(n)$.

a) Vérifier que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$T_{p+1}(n) = (p+1)! \sum_{k=0}^{p} \binom{p+1}{k+1} n^k - \sum_{k=1}^{p} \binom{p+2}{k} \frac{(p+1)!}{(k+1)!} T_k(n).$$

b) Montrer par récurrence forte (sur la variable p, à n fixé) que

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \qquad T_p(n) \in \mathbb{N}.$$

9) A l'aide notamment de la formule de la question 5c, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall p \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{1}{p+1} \leqslant \frac{S_p(n)}{n^{p+1}} \leqslant 1.$$

1. Et donc on ne manquera pas de s'inspirer de ce qu'on a fait dans les questions précédentes. Notamment les questions 3a et 4a aideront beaucoup à comprendre comme écrire la question 5a sous la forme d'une seule somme