Devoir maison n° 15

À rendre le mercredi 3 avril 2024

Ce devoir est facultatif. Il est possible et même encouragé de travailler en groupes de 2 ou 3 élèves et de me rendre une copie par groupe. Chaque élève du groupe devra avoir rédigé une partie du sujet.

Exercice 1 : Questions en vrac

1) Déterminer un équivalent simple de $\ln(n) - \dfrac{5n^2+3n+1}{1-e^{2/n}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

2) Déterminer un équivalent simple en 0 de $f : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{Arctan}\left(2\ln(1+x)\right)\left(\sqrt[5]{1+3x^2}-1\right)}{1-x+x^2-\cos(\sqrt{x})}$.

3) Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 6 de la fonction

$$x \longmapsto \frac{\sin(x)}{\sqrt[8]{1-4x^2}}.$$

4) Déterminer la nature de la série

$$\sum \sqrt{\ln\left(1+\frac{\mathrm{Arctan}(n)}{n\sqrt{n}\ln(n)}\right)}.$$

5) Calculer la somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(7n+4)\left(-\frac{2}{5}\right)^n.$$

On justifiera la convergence de la série avant de faire le calcul.

Exercice 2 : Recherche d'équivalent d'une suite récurrente

Extrait du DS n° 6 de l'an passé.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $x_0 > 0$ et,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad x_{n+1} = \frac{x_n}{1+x_n^\alpha}.$$

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_n est bien défini et $x_n > 0$.

2) a) Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   b) En déduire que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puis que sa limite est nulle.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $y_n = -\ln(x_n)$.
   a) Montrer que la série $\sum(y_{n+1}-y_n)$ diverge.
   b) Déterminer un équivalent de $y_{n+1}-y_n$ en fonction de x_n lorsque n tend vers $+\infty$.
   c) En déduire la nature de la série $\sum x_n^\alpha$.

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \dfrac{1}{x_n}$. Montrer que

$$\forall \beta \in \mathbb{R}_+^*, \qquad u_{n+1}^\beta - u_n^\beta \underset{+\infty}{\sim} \beta u_n^{\beta-\alpha}.$$

5) Donnons-nous $\varepsilon > 0$.

a) Déduire de la question précédente qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant n_0, \qquad 1 - \varepsilon \leqslant \frac{u_{n+1}^{\alpha} - u_n^{\alpha}}{\alpha} \leqslant 1 + \varepsilon.$$

b) En déduire que

$$\forall n \geqslant n_0 + 1, \qquad (n - n_0)(1 - \varepsilon) \leqslant \frac{u_n^{\alpha} - u_{n_0}^{\alpha}}{\alpha} \leqslant (n - n_0)(1 + \varepsilon).$$

c) Montrer que $u_n^{\alpha} \underset{+\infty}{\sim} n\alpha$ et retrouver le résultat de la question 3b.

d) Déterminer enfin un équivalent de x_n quand n tend vers $+\infty$.

6) Déterminer la nature de la série $\sum x_n$ en fonction de α.

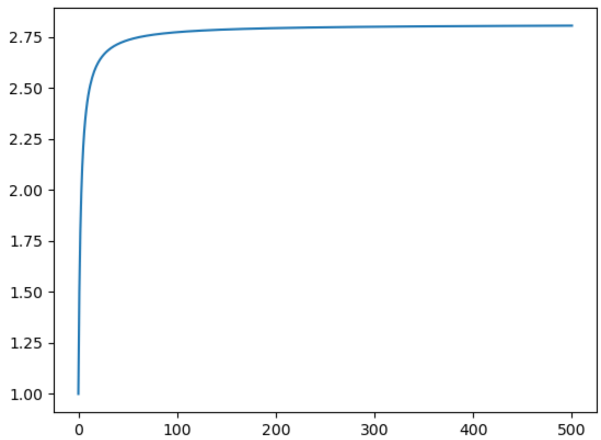
7) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$.

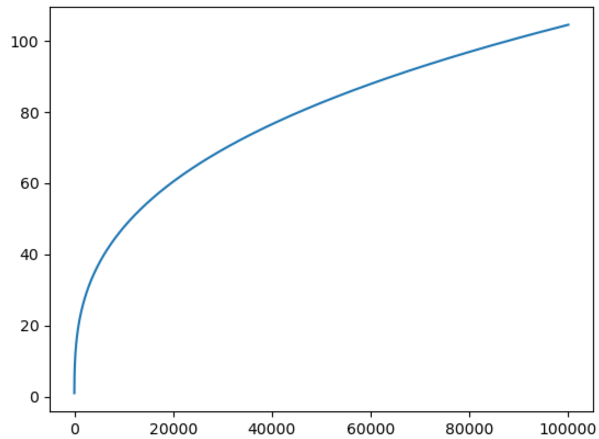
a) Compléter la fonction en Python suivante afin qu'elle prenne en argument α, x_0 et n et renvoie une liste contenant $S_0, S_1, \ldots, S_n$.

```
def Serie(a,x0,n):
    x=x0          #Initialisation de la suite
    S=..........#Initialisation de la somme
    L=..........#Initialisation de la liste
    ........................
        x=..........
        S=..........
        ............
    return L
```

b) Écrire une fonction en Python, appelée `RepSuite`, qui prend en entrée α, x_0 et n et qui représente graphiquement les $n+1$ premiers termes[1] de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

c) Voici ce que l'on obtient lorsque l'on exécute les commandes `RepSerie(1/2,1,500)` (à gauche) et `RepSerie(3/2,1,100000)` (à droite) :





Commenter les résultats.

1. C'est-à-dire qui relie les points de coordonnées $(0, S_0), (1, S_1), (2, S_2), \ldots, (n, S_n)$.