Devoir maison n$^{\text{o}}$ 14

À rendre le lundi 25 mars 2024

Ce devoir est facultatif. Il est possible et même encouragé de travailler en groupes de 2 ou 3 élèves et de me rendre une copie par groupe. Chaque élève du groupe devra avoir rédigé une partie du sujet.

Exercice 1

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On introduit

$$\varphi : P \in \mathbb{R}_n[X] \longmapsto X(1-X)P' + nXP.$$

1) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2) Montrer que $(X, X^2, \ldots, X^n)$ est une base de $\mathrm{Im}(\varphi)$. Est-ce que φ est surjective ?
3) Soit $P \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. Supposons que $P \neq 0$.
   a) Justifier que $P = \dfrac{1}{n}(X-1)P'$.
   b) En déduire que P est de degré n.
   c) Montrer que 1 est racine de P et déterminer son ordre de multiplicité.
   d) En déduire une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$. Est-ce que φ est injective ? Bijective ?

Exercice 2 : Fonctions absolument monotones

Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et non réduit à un point. On dit qu'une fonction f définie sur I et à valeurs réelles est absolument monotone (AM en abrégé) si f est de classe C^∞ sur I et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \forall x \in I, \qquad f^{(n)}(x) \geqslant 0.$$

Partie A : Des exemples de fonctions absolument monotones

1) Montrer que les fonctions $\exp$ et $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$ sont AM sur des intervalles à préciser.
2) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $f_\alpha : x \longmapsto x^\alpha$ est AM sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $\alpha \in \mathbb{N}$.
   Dans le cas où $\alpha \in \mathbb{R}_+ \backslash \mathbb{N}$, on pourra calculer $f_\alpha^{(\lfloor \alpha \rfloor + 2)}(1)$.
3) a) Soit $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\tan^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \tan^{(k)}(x) \tan^{(n-k)}(x).$$

   b) Montrer par récurrence forte que $\tan$ est AM sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

Partie B : Premières propriétés des fonctions absolument monotones

1) Soient f et g deux fonctions AM.
   a) Montrer que $f+g$ est AM.
   b) Montrer que fg est AM.

2) L'ensemble des fonctions AM est-il un espace vectoriel ?

3) Montrer que toute application AM est positive et croissante.

4) a) Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a < b$. Supposons que f est AM sur $I =]a\,;b[$. Justifier que f admet une limite finie ℓ en a.

   b) Que dire de ce résultat en b ?

   c) Supposons que $a \in \mathbb{R}$. On peut alors prolonger f par continuité en a en posant $f(a) = \ell$. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est de classe C^n sur $[a\,;b[$.

   d) En déduire que f est AM sur tout $[a\,;b[$.

Partie C : Développement en série entière des fonctions absolument monotones

Soit $R \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$. Soit f une fonction AM sur l'intervalle $[0\,;R[$. Le but de cette partie est de montrer que, pour tout $x \in [0\,;R[$,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x).$$

1) **Question préliminaire.** Soient a et b deux réels tels que $0 \leqslant a < b \leqslant R$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k.$$

   a) A l'aide d'une formule de Taylor, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n \leqslant S_n \leqslant f(b).$$

   b) Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et croissante. En déduire qu'elle converge.

   c) En déduire la valeur de

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n.$$

2) Soit $x \in [0\,;R[$. On se donne $b \in]x\,;R[$.

   a) A l'aide de la question C1a, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt \right| \leqslant \frac{(n+1)f(b)}{b-x} \int_0^x \left(\frac{x-t}{b-t} \right)^n dt.$$

   b) Montrer que, pour tout $t \in [0\,;x]$, $0 \leqslant \dfrac{x-t}{b-t} \leqslant \dfrac{x}{b}$.

   c) En déduire que

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x).$$

3) On suppose désormais que f est AM sur $]-R\,;R[$. Nous allons montrer que le résultat de la question précédente est encore[1] valable sur $]-R\,;0[$. On se donne donc $x \in]-R\,;0[$.

   a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leqslant \frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(0).$$

   b) En utilisant la question C1c, montrer alors que

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x).$$

1. On sait déjà qu'il l'est sur $[0\,;R[$. On dira alors que f est développable en série entière sur $]-R\,;R[$.