Devoir maison n° 13

À rendre le jeudi 7 mars 2024

Ce devoir est facultatif. Il est possible et même encouragé de travailler en groupes de 2 ou 3 élèves et de me rendre une copie par groupe. Chaque élève du groupe devra avoir rédigé une partie du sujet.

Exercice 1 : Questions en vrac

1) Sans montrer au préalable qu'il s'agit d'un espace vectoriel, détermine une base de

$$F = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, \begin{matrix} 2x+y-4z+t=0 \\ 5x+3z-t=0 \end{matrix} \right\}.$$

On donnera une base dont les vecteurs sont tous à coordonnées entières.

2) Déterminer l'équation [1] du plan $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $(3,-2,4)$ et $(-5,3,-7)$.

3) a) Montrer que $E = \{P \in \mathbb{R}[X] \,|\, P'(1) = P(0)\}$ est un espace vectoriel.
   b) Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1,2\}$. Justifier [2] que $E_n = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \,|\, P'(1) = P(0)\}$ est un espace vectoriel.
   c) Déterminer une base de E_n.

Exercice 2 : Matrices nilpotentes

Extrait du DS n° 5 de l'an passé.

Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite nilpotente si il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $M^p = \mathrm{O}_n$.

1) Montrer que si $M^p = \mathrm{O}_n$ alors, pour tout entier $k \geqslant p$, $M^k = \mathrm{O}_n$.

Si M est nilpotente, on appelle alors indice de nilpotence de M le plus petit entier naturel non nul (forcément) p tel que $M^p = \mathrm{O}_n$. Plus précisément celui-ci vérifie $M^{p-1} \neq \mathrm{O}_n$ et $M^p = \mathrm{O}_n$.

2) Déterminer les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui sont nilpotentes d'indice de nilpotence 1.

3) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente.
   a) Montrer que M n'est pas inversible.
   b) Montrer que ${}^tM$ est nilpotente.

4) Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, notons $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui d'indice (i,j) qui vaut 1.
   a) Montrer que, pour tous $(i,j,k,\ell) \in [\![1\,;n]\!]^2$,

$$E_{i,j}E_{k,\ell} = \begin{cases} \mathrm{O}_n & \text{si} \quad j \neq k \\ E_{i,\ell} & \text{si} \quad j = k \end{cases}$$

   Pour tout $(s,t) \in [\![1\,;n]\!]^2$, on calculera le coefficient [3] d'indice (s,t) de la matrice $E_{i,j}E_{k,\ell}$ avec la formule théorique du cours (et non pas avec un « produit en papillon »).

1. C'est-à-dire trouver des réels a, b et c (on les choisira entiers) tels que $\mathcal{P} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, ax+by+cz=0\}$. L'équation du plan est alors $ax+by+cz=0$.
2. En une ligne maximum.
3. Lorsque A désigne une matrice carrée d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$, on pourra noter $(A)_{i,j}$ le coefficient d'indice $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$ de A.

b) En déduire que $E_{1,n}$ et $E_{n,1}$ sont nilpotentes d'indice 2.

c) Posons $A = E_{1,n} + E_{n,1}$ et $B = E_{1,1} + E_{n,n}$. En utilisant la question 4a, vérifier que $A^2 = B$ et $BA = A$.

d) En déduire que A n'est pas nilpotente.

e) L'ensemble des matrices nilpotentes est-il un espace vectoriel ?

5) Soient M et N deux matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui **commutent**. Soient p et q des entiers naturels non nuls tels que $M^p = \mathrm{O}_n$ et $N^q = \mathrm{O}_n$.

a) Montrer que MN est nilpotente.

b) Calculer $(M+N)^{p+q-1}$ et en déduire que $M+N$ est nilpotente.

6) Soit M une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Notons p son indice de nilpotence.

a) Comme $M^{p-1} \neq \mathrm{O}_n$, la matrice M^{p-1} possède au moins un coefficient non nul (disons qu'il s'agit du coefficient d'indice (i_0, j_0)). Trouver une matrice $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nulle telle que $M^{p-1}X \neq \mathrm{O}_{n,1}$.

b) Soit $k \in [\![0, p-1]\!]$. Justifier que $M^k X \neq \mathrm{O}_{n,1}$.

c) Montrer que $(X, MX, M^2X, M^3X, \dots, M^{p-1}X)$ est une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
On raisonnera comme pour les famille échelonnées de polynômes (raisonner par l'absurde, considérer le plus petit indice des coefficients non nuls) et multiplier par une puissance de M bien choisie (on rappelle que M est nilpotente).

On admet (nous verrons ce résultat dans le chapitre sur les espaces vectoriels de dimension finie) qu'une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ admet au plus n vecteurs. On en déduit que $p \leqslant n$: l'indice de nilpotence est au maximum l'ordre de la matrice. Par conséquent $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est nilpotente si et seulement si $M^n = \mathrm{O}_n$.

7) On suppose dans cette question uniquement que $n = 2$. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On sait alors que $M^2 = \mathrm{O}_2$.

a) Supposons que $b = 0$. Montrer alors que $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$.

b) Supposons que $b \neq 0$. Montrer alors que $M = \begin{pmatrix} a & b \\ -a^2/b & -a \end{pmatrix}$.

c) Déterminer toutes les matrices nilpotentes d'ordre 2.

8) a) On a vu que, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors il suffit de vérifier si $A^n = \mathrm{O}_n$ ou non pour savoir si elle est nilpotente ou non. Écrire alors une fonction en Python qui prend en argument une matrice carrée A et qui renvoie `True` si A est nilpotente, `False` sinon (elle ne renverra PAS de message d'erreur si la matrice n'est pas carrée).
On rappelle que si `A` et `B` désignent deux matrices implémentée en Python, alors

- *`np.shape(A)` renvoie la taille de `A` sous forme de liste (dont la première coordonnée est le nombre de ligne et la deuxième le nombre de colonnes).*
- *`A==B` renvoie une matrice avec des `True` aux coefficients communs de `A` et `B` et des `False` sinon. La commande `np.sum(A==B)` renvoie donc le nombre de coefficients valant `True`, i.e. le nombre de coefficients que `A` et `B` ont en commun. Quelle commande permet donc de tester si `A` et `B` sont deux matrices égales ? Quelle commande permet de tester si une matrice est la matrice nulle ?*

b) Écrire une fonction en Python qui prend en entrée une matrice nilpotente A (on sait qu'elle l'est) et qui renvoie son indice de nilpotence.