Devoir maison n° 12

À rendre le lundi 26 février 2024

Exercice 1 : Fonctions à variation bornée

Soit I un segment. Notons $\mathcal{V}$ l'ensemble des fonctions f de I dans $\mathbb{R}$ telles qu'il existe deux fonctions g et h croissantes de I dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f = g - h$. Une telle fonction f est dite *à variation bornée* sur I.

1) Si $f \in \mathcal{V}$ s'écrit $f = g - h$ avec g et h croissantes sur I, est-ce que g et h sont uniques ?
2) Justifier que, si f est monotone de I dans $\mathbb{R}$, alors f est à variation bornée sur I.
3) Montrer que $\mathcal{V}$ est un espace vectoriel.

Problème 2 : Matrice orthogonales

Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$. On dit qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si ${}^tMM = M\,{}^tM = \mathrm{I}_n$. Autrement dit M est orthogonale si et seulement si M est inversible et $M^{-1} = {}^tM$.

On note $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Partie A : Le cas particulier de $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$

Dans cette partie, on se donne $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$.

1) Montrer que $a^2 + b^2 = a^2 + c^2 = d^2 + c^2 = d^2 + b^2 = 1$ et que $ac + bd = 0$.
2) Supposons que $a = 0$. Montrer que M est l'une des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3) Supposons que $a \neq 0$.
   a) Justifier qu'il existe $\theta \in [0\,;2\pi[\,\backslash\{-\pi/2, \pi/2\}$ tel que $a = \cos(\theta)$ et $c = \sin(\theta)$.
   b) En déduire qu'il existe $\varepsilon \in \{-1;1\}$ tel que $M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\varepsilon\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \varepsilon\cos(\theta) \end{pmatrix}$.

Nous en déduisons que, si $M \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$, alors il existe $\theta \in [0\,;2\pi[$ et $\varepsilon \in \{-1;1\}$ tels que $M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\varepsilon\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \varepsilon\cos(\theta) \end{pmatrix}$.

4) Réciproquement, donnons-nous $\theta \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon \in \{-1;1\}$. Vérifier que $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\varepsilon\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \varepsilon\cos(\theta) \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$.
5) Écrire une fonction en Python qui prend en entrée θ et ε et qui renvoie $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\varepsilon\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \varepsilon\cos(\theta) \end{pmatrix}$.

Partie B : Généralités sur les matrices orthogonales

1) L'ensemble $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est-il un espace vectoriel ?
2) a) Vérifier que, si $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, alors $A^{-1} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et ${}^tA \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
   b) Montrer que, si $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, alors $AB \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

3) Pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on appelle norme de X le réel positif $\|X\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$.

a) Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que $\|X\| = 0$ si et seulement si $X = 0$.

b) Justifier que, si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors $\|X\|^2 = {}^tXX$.
Plus rigoureusement, ${}^tXX \in \mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ *donc il s'agit de montrer que* ${}^tXX$ *est égale à la matrice de* $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ *dont le seul coefficient est* $\|X\|^2$. *Pour simplifier les notations, on confondra* $\mathbb{R}$ *et* $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ *et toute matrice* $A = (a) \in \mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ *pourra être notée plus simplement* $a \in \mathbb{R}$.

c) En déduire que, si $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors $\|AX\| = \|X\|$.

4) Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer que, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^2 = 1$.
On pourra s'intéresser à des coefficients bien choisis de la matrice ${}^tAA$.

b) En déduire que, pour tout $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$, $|a_{i,j}| \leqslant 1$.

5) Notons $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que, sur chaque ligne et sur chaque colonne de M, se trouve un et un seul coefficient non nul qui vaut 1 ou -1.

a) Soient $M \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ et $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$. Calculer $(M\,{}^tM)_{i,j}$.

b) En déduire que les matrices de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ sont les seules matrices de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont entiers.

Partie C : Une méthode pour construire une matrice orthogonale

1) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.

a) En utilisant la méthode de Gauss-Jordan, montrer que la matrice $\mathrm{I}_3 + A$ est inversible et calculer son inverse.

b) Calculer $M = (\mathrm{I}_3 - A)(\mathrm{I}_3 + A)^{-1}$.

c) Vérifier, sans inverser M avec le pivot de Gauss, que $M \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$.

Nous allons généraliser ce résultat. Dans la suite A désigne une matrice quelconque de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ (c'est-à-dire $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et vérifie ${}^tA = -A$).

2) Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $(\mathrm{I}_n + A)X = O_{n,1}$.

a) Montrer que ${}^tAAX = -X$.

b) En déduire que $\|AX\|^2 = -\|X\|^2$ puis que $X = O_{n,1}$.

c) Que dire alors sur les solutions du système homogène dont la matrice associée est $\mathrm{I}_n + A$? Conclure que $\mathrm{I}_n + A$ est alors inversible.

d) En déduire que $\mathrm{I}_n - A$ est inversible.

3) Soient $P \in \mathbb{R}[X]$, $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que la matrice $P(B)$ est inversible. Montrer que les matrices $\big(P(B)\big)^{-1}$ et $Q(B)$ commutent.
On rappelle que les matrices $P(B)$ *et* $Q(B)$ *commutent.*

4) Posons $M = (\mathrm{I}_n - A)(\mathrm{I}_n + A)^{-1}$.

a) Vérifier que ${}^tM = (\mathrm{I}_n - A)^{-1}(\mathrm{I}_n + A)$.

b) En utilisant la question 3 (avec $B = A$), montrer alors que $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

c) Écrire une fonction en Python qui prend en entrée un entier naturel n non nul, qui construit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ aléatoire n et renvoie la matrice orthogonale $M = (\mathrm{I}_n - A)(\mathrm{I}_n + A)^{-1}$.
Pour construire A, *on commencera par construire une matrice aléatoire à coefficients entiers compris entre* -9 *et* 9 *puis on modifiera les coefficients sous-diagonaux stricts et les coefficients diagonaux pour la transformer en une matrice antisymétrique.*