Devoir maison n° 10

À rendre le lundi 29 janvier 2024

Exercice 1 : Questions en vrac

Extrait du DS n° 4 de l'an passé.

1) Déterminer une primitive de $x \longmapsto \dfrac{x^2}{\sqrt[4]{1-x^3}}$ sur un intervalle à préciser.
   On ne fera pas de calcul d'intégrales.
2) a) A l'aide d'un calcul d'intégrale, déterminer une primitive[1] de $x \longmapsto x\operatorname{Arctan}(x)$ sur $\mathbb{R}$.
   b) A l'aide du changement de variable $t = x^2$, puis de la question précédente, montrer que
$$\int_0^3 \operatorname{Arctan}(\sqrt{t})\, dt = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}.$$
3) Montrer par le calcul que
$$\frac{1}{n^{3/2}} \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{\sqrt{2n+k}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Exercice 2 : $\zeta(2) = \pi^2/6$

Extrait du DS n° 4 de l'an passé.

Partie A : Existence de $\zeta(2)$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

1) Étudier les variations de la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$.
2) Pour tout $k \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, montrer que
$$\frac{1}{k^2} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^2}.$$
3) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$,
$$S_n \leqslant 1 + \int_1^n \frac{dt}{t^2}.$$
4) En déduire que $(S_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel de $]1\,;2]$.
5) Écrire un script en Python qui calcule et affiche la valeur de S_{10000}.
   La valeur obtenue est alors une approximation de la limite de la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$.

On note $\zeta(2)$ la limite de la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$. Le but de ce problème est de calculer sa valeur.

1. Pour que vous puissiez faire la question suivante, je vous donne la réponse : une primitive est par exemple $F : x \longmapsto \frac{1}{2}\left((x^2+1)\operatorname{Arctan}(x) - x\right)$. Dériver la fonction F ne sera pas considéré comme une réponse valable à cette question.

Partie B : Intégrales de Wallis

Cette partie est indépendante de la partie A (mais pas de la partie C). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\, dt.$$

1) Calculer W_0 et W_1.

2) Justifier que, pour $n \in \mathbb{N}$, $W_n > 0$.

3) Montrer que $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

4) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n.$$

5) En déduire que la suite $((n+1)W_{n+1}W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et préciser la constante en question.

6) A l'aide de la monotonie de $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$, montrer que $\dfrac{W_{n+1}}{W_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

7) Déduire des deux questions précédentes que $\sqrt{n}W_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

Partie C : Calcul de $\zeta(2)$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons

$$I_n = \int_0^{\pi/2} t^2 \cos^n(t)\, dt \qquad \text{et} \qquad A_n = \frac{\pi}{2}\frac{I_{2n}}{W_{2n}}$$

1) Calculer I_0 et A_0.

2) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$W_{2n} = 2n \int_0^{\pi/2} t \sin(t) \cos^{2n-1}(t)\, dt,$$

puis que

$$W_{2n} = n(2n-1)I_{2n-2} - 2n^2 I_{2n}.$$

b) En utilisant la formule de la question B4, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad A_{n-1} - A_n = \frac{\pi}{4n^2}.$$

c) Conclure que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_0 - A_n = \dfrac{\pi}{4} S_n$.

3) a) Justifier qu'il existe un unique $\alpha \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ tel que $\cos(\alpha) = \dfrac{2}{\pi}$.

b) Montrer que, pour tout $t \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\sin(t) \geqslant \dfrac{2t}{\pi}$.

c) Posons $\varphi : t \longmapsto 1 - \dfrac{4t^2}{\pi^2}$. Déduire de la question précédente que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad I_{2n} \leqslant -\frac{\pi^3}{16} \int_0^{\pi/2} \varphi^n(t)\, \varphi'(t)\, dt.$$

4) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad I_{2n} \leqslant \frac{\pi^3}{16(n+1)}.$$

5) En utilisant la question B7 et un encadrement, montrer que $A_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

6) Conclure que $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$