Devoir maison n$^{\text{o}}$ 1

À rendre le jeudi 21 septembre 2023

*Ce devoir est **individuel** et **obligatoire**. Si vous n'arrivez pas à traiter une question, demandez de l'aide à vos camarades ou à moi même et, si vous n'y arrivez vraiment pas, je préfère que vous ne traitiez pas la question plutôt que de la recopier sur quelqu'un d'autre.*

Rédigez sur une copie double lisiblement et proprement. Laissez une marge à gauche, écrivez à l'encre bleue ou noire et encadrez ou soulignez les résultats principaux.

Veuillez apporter un soin particulier à la rédaction, à la rigueur et aux raisonnements. Tout résultat doit être justifié. N'oubliez pas d'introduire toutes les variables que vous utilisez.

Exercice 1 : Questions en vrac

1) Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ trois propositions. Montrer (sans utiliser de tables de vérité) que

$$(\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C})) \qquad \Longleftrightarrow \qquad ((\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{C}).$$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $F_n = 2^{2^n} + 1$. Montrer par récurrence que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \prod_{k=0}^{n} F_k = F_{n+1} - 2.$$

Ci-dessus $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} F_k$ *désigne le produit* $F_0 \times F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_n$. *C'est une notation classique que l'on verra bientôt en cours.*

3) Résoudre l'inéquation $3x - 5 + \sqrt{13 - 6x} > 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
On ne fera pas d'étude de variations d'une fonction pour résoudre cette inéquation.

4) Considérons l'ensemble

$$A = \left\{ \frac{1}{n} + \frac{(-1)^p}{p} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^*,\ p \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

   a) Montrer que $\max(A) = \dfrac{3}{2}$ et que -1 est un minorant de A.

   b) En raisonnant par l'absurde, montrer que $\inf(A) = -1$.
   On cherchera un contradiction en prenant $p = 1$.

   c) Est-ce que -1 est le minimum de A ?

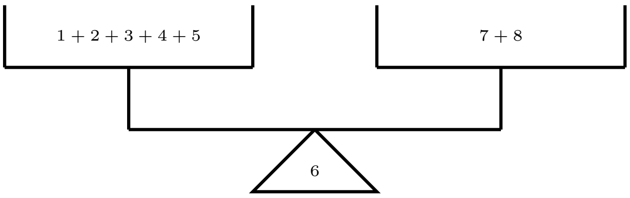
Exercice 2 : Entiers équilibrés

Un entier naturel non nul m est dit équilibré si il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que la somme des entiers naturels qui précèdent m est égale à la somme des p entiers consécutifs à m, c'est-à-dire

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (m-1) = (m+1) + (m+2) + \cdots + (m+p).$$

L'entier p est alors appelée le poids de m.

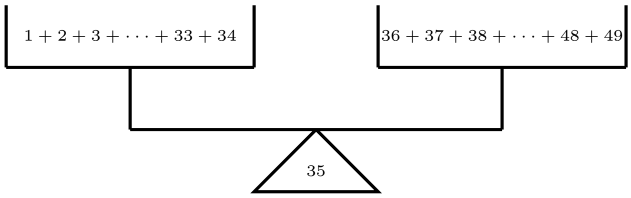
On peut imaginer une balance avec la somme des prédécesseurs d'un entier m d'un côté et la somme des p successeurs de m de l'autre. La balance est à l'équilibre si et seulement si m est équilibré de poids p. Par exemple :



6 est équilibré de poids 2 puisque

$$1 + 2 + 3 + 4 + \underbrace{5}_{=6-1} = \underbrace{7}_{=6+1} + \underbrace{8}_{=6+2}$$

(ces sommes sont égales à 15).



35 est équilibré de poids 14 puisque

$$1 + 2 + 3 + \cdots + \underbrace{34}_{=35-1} = \underbrace{36}_{=35+1} + 37 + \cdots + \underbrace{49}_{=35+14}$$

(ces sommes sont égales à 595).

On convient que 1 est équilibré de poids 0 puisque la somme des prédécesseurs de 1 et la somme des 0 nombres consécutifs de 1 sont égales (à 0).

Le but de cet exercice est de déterminer tous les entiers équilibrés.

1) Soit m un entier naturel non nul tel que $\sqrt{8m^2+1} \in \mathbb{N}$.
   a) Vérifier que le nombre $-2m - 1 + \sqrt{8m^2+1}$ est un entier naturel.
   b) En raisonnant par l'absurde, montrer que $-2m - 1 + \sqrt{8m^2+1}$ est pair.

2) Soit m un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soit $p \in \mathbb{N}^*$.
   a) On rappelle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme S_n des entiers de 1 à n est égale à $\dfrac{n(n+1)}{2}$. Montrer alors que m est un entier équilibré de poids p si et seulement si $\dfrac{m(m-1)}{2} = pm + \dfrac{p(p+1)}{2}$.
   b) En réécrivant l'expression ci-dessus comme une équation polynomiale du second degré d'inconnue p (et dont les coefficients dépendent de m), montrer que m est équilibré si et seulement si $\sqrt{8m^2+1} \in \mathbb{N}$ et que, dans ce cas, son poids est

$$p = \frac{-2m - 1 + \sqrt{8m^2+1}}{2}.$$

Il est immédiat que, lorsque $m = 1$, $\sqrt{8m^2+1} = 3 \in \mathbb{N}$ et $p = \dfrac{-2m - 1 + \sqrt{8m^2+1}}{2} = 0$.

3) a) Écrire une fonction en Python, appelée `EntierEquilibre`, qui prend en argument un entier naturel non nul m et qui renvoie `True` si $\sqrt{8m^2+1} \in \mathbb{N}$ et `False` sinon.
   b) Écrire une fonction en Python, appelée `ListeEquilibre`, qui prend en argument un entier naturel non nul n et qui renvoie la liste des entiers équilibrés inférieurs à n.
   On utilisera une boucle `for`. Pour chaque entier inférieur à n, il s'agit de tester s'il est équilibré ou non à l'aide de la fonction `EntierEquilibre` et, lorsque c'est le cas, l'ajouter dans une liste.

Introduisons (E) l'équation

$$a^2 - 8b^2 = 1$$

d'inconnues $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$. On dit qu'un couple d'entiers (a, b) est solution de (E) lorsque $a^2 - 8b^2 = 1$.

Si $m \in \mathbb{N}^*$, alors $\sqrt{8m^2+1} \in \mathbb{N}$ si et seulement si il existe $a \in \mathbb{N}$ tel que $8m^2 + 1 = a^2$, c'est-à-dire $a^2 - 8m^2 = 1$, autrement dit (a, m) est une solution de (E). Ainsi un entier m non nul est équilibré si et seulement si il existe $a \in \mathbb{N}$ tel que (a, m) est solution de (E).

4) On définit les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + 8b_n \\ b_{n+1} = a_n + 3b_n \end{cases} .$$

a) Calculer b_1, b_2 et b_3.

b) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(3+\sqrt{8})^n = a_n + b_n\sqrt{8}$.

On montre de même (on ne demande pas de le faire) que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(3-\sqrt{8})^n = a_n - b_n\sqrt{8}$.

c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, (a_n, b_n) est solution de (E), c'est-à-dire $a_n^2 - 8b_n^2 = 1$.

Nous venons de montrer que tous les couples (a_n, b_n), avec $n \in \mathbb{N}$, sont des solutions de (E). Nous allons montrer que ce sont les seules solutions.

On se donne un couple d'entiers naturels (x, y) solution de (E) qui n'est pas $(1, 0)$.

5) a) Justifier que $x + y\sqrt{8} > 0$.

b) Posons $n = \left\lfloor \dfrac{\ln(x+y\sqrt{8})}{\ln(3+\sqrt{8})} \right\rfloor$. Montrer que $1 \leqslant \dfrac{x+y\sqrt{8}}{(3+\sqrt{8})^n} < 3+\sqrt{8}$.

c) Vérifier que

$$\frac{x+y\sqrt{8}}{(3+\sqrt{8})^n} = (x+y\sqrt{8})(a_n - b_n\sqrt{8}) = (xa_n - 8yb_n) + (ya_n - xb_n)\sqrt{8}.$$

d) On admet que $xa_n - 8yb_n$ et $ya_n - xb_n$ sont des entiers naturels. Montrer alors que le couple $(xa_n - 8yb_n, ya_n - xb_n)$ est solution de (E).
On rappelle que (x, y) et (a_n, b_n) sont solutions de (E).

6) Montrer que, si (u, v) est un couple d'entiers naturels solution de (E), alors $u+v\sqrt{8} = 1$ ou $u+v\sqrt{8} \geqslant 3+\sqrt{8}$.

7) En déduire que $\dfrac{x+y\sqrt{8}}{(3+\sqrt{8})^n} = 1$ puis que $x + y\sqrt{8} = a_n + b_n\sqrt{8}$.
On pourra appliquer la question précédente avec $u = xa_n - 8yb_n$ et $v = ya_n - xb_n$ (possible puisque, d'après la question 5d, le couple $(xa_n - 8yb_n, ya_n - xb_n)$ est solution de (E)).

8) On admet que $\sqrt{8} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Montrer que $y = b_n$ et en déduire que $x = a_n$.

Nous en déduisons que le solutions de (E) sont exactement les couples (a_n, b_n), $n \in \mathbb{N}$. Il s'ensuit que les entiers équilibrés sont exactement les b_n, $n \in \mathbb{N}^*$.