Concours blanc de Mathématiques du premier semestre

jeudi 11 janvier 2024

La durée de l'épreuve est de 4 heures et aucune sortie définitive avant la fin n'est autorisée.

Avant de commencer, lisez l'intégralité du sujet.

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits.

Rédigez sur des copies doubles lisiblement et proprement. Laissez une marge à gauche et de la place au début de la copie pour mes appréciations. Écrivez à l'encre bleue ou noire. ***Encadrez ou soulignez les résultats principaux.***

Veuillez apporter un soin particulier à la rédaction, à la rigueur et aux raisonnements. Tout résultat doit être justifié. Ces éléments seront pris en compte dans la notation. N'oubliez pas d'introduire toutes les variables que vous utilisez, lorsqu'il le faut. Évitez les symboles $\forall$, $\exists$, $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ sauf si vous savez les utiliser correctement.

Exercice 1 : Bingo

Fixons N et r deux entiers tels que $N \geqslant 3$ et $2 \leqslant r \leqslant N-1$.

On s'intéresse dans cet exercice à un bingo dans lequel on effectue des tirages successifs avec remise d'une boule dans une urne qui en contient N, numérotées de 1 à N. L'un des participants a acheté un carton ayant des cases numérotées de 1 à r. À chaque fois que l'un des numéros écrits sur son carton est tiré au sort, il coche la case correspondante. Si le numéro tiré ne figure pas sur son carton ou si la case a déjà été cochée, il ne fait rien. La boule tirée est remise dans l'urne et on passe au tirage suivant.

On admet que cette expérience peut alors être modélisée par une espace probabilité fini [1] $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ que l'on ne cherchera pas à expliciter. On introduit :

- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire Z_n qui compte le nombre de cases de son carton qui sont cochées à l'issue du $n^{\text{ième}}$ tirage.
- pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'événement A_k : « on tire une boule dont le numéro est écrit sur le carton lors du $k^{\text{ième}}$ tirage ».
- pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'événement B_k : « on coche une nouvelle case sur le carton à l'issue du $k^{\text{ième}}$ tirage ».

1) Recopier (sans les commentaires) et compléter la fonction Python suivante qui prend en entrée N, r et n vérifiant [2] $1 \leqslant n \leqslant r < N$, qui simule cette expérience et qui renvoie une réalisation de Z_n.

```python
import ..........................
import ..........................
def simul_Z(N,r,n):
    L=.................. #Une liste avec r coordonnées valant toutes 0
    ..................... #n fois de suite,
    ..................... #on tire uniformément un entier k entre 1 et N
    ..................... #Si cet entier est entre 1 et r
    ..................... #La coordonnée k-1 de L devient 1
    return .............. #La somme des coordonnées de L
```

Dans cette fonction, on code le carton par une liste à r coordonnées. Initialement elles valent toutes 0, puisque l'on a rien coché. A chaque fois que le numéro tiré est compris entre 1 et r, on stocke 1 dans la coordonnée de la liste dont l'indice est $k-1$ (elle passe de 0 à 1 si on n'avait jamais tiré ce numéro ou bien elle reste à 1 si on avait déjà tiré le numéro).

1. Pour cela, on se limite à un (grand) nombre de tirages.
2. On ne prévoira pas de message d'erreur si ce n'est pas le cas : on suppose que l'utilisateur de la fonction sait ce qu'il fait.

2) Déterminer la loi de X_n, la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où un numéro écrit sur le carton a été tiré au sort lors des n premiers tirages. Donner, sans démonstration, son espérance et sa variance.

3) Justifier que Z_1 suit une loi de Bernoulli dont on précisera le paramètre. Donner $\mathbb{E}(Z_1)$ sans démonstration.

4) a) Déterminer $Z_2(\Omega)$.

   b) Exprimer $[Z_2 = 0]$ et $[Z_2 = 2]$ en fonction des événements des familles $(A_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ et $(B_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$.

   c) Calculer alors $\mathbb{P}(Z_2 = 0)$ et $\mathbb{P}(Z_2 = 2)$.

   d) En déduire que $\mathbb{P}(Z_2 = 1) = \dfrac{(2N+1)r - 2r^2}{N^2}$.

   e) Calculer $\mathbb{E}(Z_2)$.

5) Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$.

   a) Préciser $Z_n(\Omega)$ dans le cas où $2 \leqslant n \leqslant r$ et dans le cas où $n \geqslant r$.

   b) Calculer $\mathbb{P}(Z_n = 0)$.

   c) Montrer que, dans le cas où $n \leqslant r$, $\mathbb{P}(Z_n = n) = \dfrac{r!}{N^n(r-n)!}$.

   d) Écrire alors une fonction en Python qui prend en entrée N, r et n vérifiant $1 \leqslant n \leqslant r < N$ et qui calcule $\mathbb{P}(Z_n = n)$ à l'aide de la formule de la question précédente.
   Cette fonction renverra 0 si la condition $1 \leqslant n \leqslant r < N$ n'est pas vérifié. On n'utilisera PAS de fonction préalablement définie ou préexistante permettant le calcul de factorielles. On commencera par écrire $\mathbb{P}(Z_n = n) = \dfrac{r!}{N^n(r-n)!}$ sous forme d'un produit.

6) On suppose dans cette question que $n \in [\![2, r]\!]$.

   a) Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Préciser $\mathbb{P}_{[Z_{n-1}=k]}(Z_n = k)$ et $\mathbb{P}_{[Z_{n-1}=k-1]}(Z_n = k)$.

   b) Si $j \in \mathbb{N}\backslash\{k-1, k\}$, que vaut $\mathbb{P}_{[Z_{n-1}=j]}(Z_n = k)$?

   c) En déduire que, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$,

$$\mathbb{P}(Z_n = k) = \frac{r+1-k}{N}\,\mathbb{P}(Z_{n-1} = k-1) + \frac{k+N-r}{N}\,\mathbb{P}(Z_{n-1} = k).$$

Dans la suite on considère désormais que $Z_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$ (quitte à ajouter des $k \in \mathbb{N}$ tels que $\mathbb{P}(Z_n = k) = 0$). On admet que la relation de la question 6c reste vraie quels que soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, n]\!]$.

7) a) Montrer alors

$$\mathbb{E}(Z_n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{n-1}\big(k(k+N-r) + (r-k)(k+1)\big)\,\mathbb{P}(Z_{n-1} = k).$$

   b) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}, \qquad \mathbb{E}(Z_n) = \frac{N-1}{N}\mathbb{E}(Z_{n-1}) + \frac{r}{N}.$$

   On remarque que $(\mathbb{E}(Z_n))_{n\geqslant 1}$ est une suite arithmético-géométrique.

   c) En déduire une expression de $\mathbb{E}(Z_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   d) En déduire que $(\mathbb{E}(Z_n))_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel que l'on précisera. Commenter.

Partie A : Deux déterminations de la fonction de Lambert

Introduisons la fonction $\varphi : x \longmapsto xe^x$.

1) Justifier que φ est définie sur $\mathbb{R}$ et dresser le tableau de variations complet de φ sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que :
   - φ réalise une bijection de $[-1\,;+\infty[$ dans $\left[-\frac{1}{e}\,;+\infty\right[$. On note W_0 la bijection réciproque de $\varphi\Big|_{[-1\,;+\infty[}$. Elle est donc définie sur $\left[-\frac{1}{e}\,;+\infty\right[$.
   - φ réalise une bijection de $]-\infty\,;-1]$ dans $\left[-\frac{1}{e}\,;0\right[$. On note W_1 la bijection réciproque de $\varphi\Big|_{]-\infty\,;-1]}$. Elle est donc définie sur $\left[-\frac{1}{e}\,;0\right[$.

Les fonctions W_0 et W_1 sont toutes les deux appelées fonction de Lambert.

3) a) Justifier que
$$\forall x \in [-1\,;+\infty[\,,\quad W_0(xe^x) = x \qquad \text{et} \qquad \forall x \in]-\infty\,;-1]\,,\quad W_1(xe^x) = x.$$
   b) Montrer que $W_0(0) = 0$, $W_0(e) = 1$ et $W_0\left(-\frac{1}{e}\right) = W_1\left(-\frac{1}{e}\right) = -1$.

4) Dresser les tableaux de variations complets de W_0 et W_1.
On ne fera pas intervenir les dérivées dans le tableau (ni même pour le raisonnement).

5) a) Justifier que, pour tout $y \in \left]-\frac{1}{e}\,;0\right[\cup]0\,;+\infty[$, $e^{W_0(y)} = \dfrac{y}{W_0(y)}$.
   b) En déduire que $W_0(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$.

6) a) Montrer que, pour tout $x \in [e\,;+\infty[$, $\ln(x) - \ln(\ln(x)) \geqslant 0$ et $\varphi\Big(\ln(x) - \ln(\ln(x))\Big) \leqslant x$.
   b) En déduire que, pour tout $x \in [e\,;+\infty[$, $\ln(x) - \ln(\ln(x)) \leqslant W_0(x) \leqslant \ln(x)$.
   c) En déduire que $W_0(x) \underset{x\to +\infty}{\sim} \ln(x)$.

7) Tracer (sur un même graphique mais avec deux couleurs différentes), les courbes représentatives des fonctions W_0 et W_1.

8) Montrer que
$$\forall a \in]0\,;e]\,,\quad W_0\left(-\frac{\ln(a)}{a}\right) = -\ln(a) \qquad \text{et} \qquad \forall a \in [e\,;+\infty[\,,\quad W_1\left(-\frac{\ln(a)}{a}\right) = -\ln(a).$$

9) On rappelle que, pour tout $x \in \left[-\frac{1}{e}\,;+\infty\right[$, $W_0(x)$ est l'unique antécédent de x par φ qui appartient à $[-1\,;+\infty[$.
   a) Justifier que, pour tout $x \in \left[-\frac{1}{e}\,;+\infty\right[$, $-1 \leqslant W_0(x) \leqslant \max\{0; x\}$.
   b) Recopier et compléter alors la fonction Python suivante pour qu'elle prenne en entrée $x \in \left[-\frac{1}{e}\,;+\infty\right[$ et calcule une valeur approchée de $W_0(x)$ à 10^{-4} avec la méthode de dichotomie.

```
1  import ..............................
2  def W0(x):
3      a=-1
4      b=max(0,x)#Le maximum entre 0 et x
5      while .....................
6          c =.....................
7          if c*np.exp(c)>x:
8              ....................
9          else:
10             ....................
11     return a
```

On expliquera plus particulièrement les commandes des lignes 8 et 10. On pourra éventuellement s'aider d'un dessin.

   c) Écrire des commandes en Python qui représentent graphiquement W_0 sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{e}\,;5\right]$.

Partie B : Utilisation pour la résolution d'équations

1) Soit $t \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation $xe^x = t$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

On se donne $a \in \mathbb{R}_+^*$, $b \in \mathbb{R}^*$ et $c \in \mathbb{R}$. On souhaite résoudre l'équation $a^x + bx + c = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. On appelle discriminant de cette équation la quantité $\Delta = \frac{\ln(a)}{b} a^{-\frac{c}{b}}$.

2) Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $y = -\ln(a)x - \dfrac{c\ln(a)}{b}$. Vérifier que $a^x + bx + c = 0$ si et seulement si $ye^y = \Delta$.

3) En déduire que l'équation $a^x + bx + c = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$,
   - n'admet aucune solution si $\Delta < -\dfrac{1}{e}$.
   - admet $-\dfrac{c}{b} - \dfrac{W_0(\Delta)}{\ln(a)}$ pour unique solution si $\Delta \in \left\{-\dfrac{1}{e}\right\} \cup \mathbb{R}_+$.
   - admet $-\dfrac{c}{b} - \dfrac{W_0(\Delta)}{\ln(a)}$ et $\dfrac{c}{b} - \dfrac{W_1(\Delta)}{\ln(a)}$ pour solutions si $-\dfrac{1}{e} < \Delta < 0$.

4) En déduire les solutions de l'équation $a^x = x$, d'inconnues $x \in \mathbb{R}$.

Partie C : Application à la tétration infinie

Soit $a \in [1\,; +\infty[$. Sous réserve d'existence, on appelle tétration infinie (ou tour de puissances infinie) de a, et on note ${}^{\infty}a$ le nombre

$$a^{a^{a^{a^{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}}}.$$

Dans un premier temps, il convient de définir proprement cet objet lorsque c'est possible. Pour cela on définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $x_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = a^{x_n}$. On a alors

$$x_1 = a, \qquad x_2 = a^{x_1} = a^a, \qquad x_3 = a^{x_2} = a^{a^a}, \qquad x_4 = a^{x_3} = a^{a^{a^a}}, \qquad \dots$$

Ainsi, sous réserve de convergence, on définit ${}^{\infty}a = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$. L'objectif de cette partie est de déterminer les valeurs de a pour lesquelles il y a convergence puis de déterminer ${}^{\infty}a$ le cas échéant.

On introduit les fonctions $f : x \longmapsto a^x$ et $g : x \longmapsto a^x - x$.

1) Que vaut ${}^{\infty}1$?

2) Dans toute la suite, on suppose que $a > 1$.
   a) Dresser le tableau de variations complet de g sur $\mathbb{R}$. On précisera notamment le minimum de g sur $\mathbb{R}$.
   b) Justifier que, si $a > e^{1/e}$, alors f n'admet pas de point fixe.
   c) En déduire que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite finie.

3) Supposons que $a \in \left]1\,; e^{1/e}\right]$.
   a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant x_n \leqslant x_{n+1} \leqslant e$.
   b) En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que sa limite est égale à $-\dfrac{W_0(-\ln(a))}{\ln(a)}$.

Ainsi, lorsque[1] $a \in]1\,; +\infty[$, ${}^{\infty}a$ existe si et seulement si $a \in \left]1\,; e^{1/e}\right]$ et on a

$$a^{a^{a^{a^{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}}} = -\frac{W_0(-\ln(a))}{\ln(a)}.$$

4) A l'aide de la question A8, justifier que la tétration infinie $\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}}}$ existe et préciser sa valeur. *On admet que* $2 < e$.

1. Lorsque $a \in]0\,;1[$, on peut montrer (mais c'est beaucoup plus technique) que ${}^{\infty}a$ existe si et seulement si $a \in \left]e^{-1}\,;1\right[$. Sa valeur est encore $-\dfrac{W_0(-\ln(a))}{\ln(a)}$.