Chapitre 9

Ensembles et applications

I Ensembles

1) Ensembles et éléments

Dans le chapitre 1, nous avons introduit la notion d'ensemble. Rappelons quelques définitions :

Définition. *Un ensemble E est une collection d'objets appelés éléments de E. On note $x \in E$ pour dire que l'élément x appartient à E. On note $x \notin E$ pour dire que l'élément x n'appartient pas à E.*
On dit que deux ensembles E et F sont égaux, et on note $E = F$, si ils ont les mêmes éléments.
Un ensemble ayant un élément x et un seul est appelé singleton et noté $\{x\}$.

Un ensemble peut être défini :

- par *extension* : en listant tous ses éléments entre accolades. Dans ce cas, l'ordre dans lequel les éléments sont listés, n'a pas d'importance. De plus chaque élément figure une seule fois dans la liste.
- par *compréhension* : si P est une propriété portant sur les éléments d'un ensemble E, alors on note $\{x \in E \mid P(x)\}$ l'ensemble des éléments x de E tels que $P(x)$ est vraie.

Il peut aussi être défini comme l'image d'un autre ensemble par une application, comme on le verra dans le paragraphe II.

Exemples :

- *On note $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (resp. $D(\mathbb{R}, \mathbb{R})$) l'ensemble des fonctions à valeurs réelles qui sont continues (resp. dérivables) sur $\mathbb{R}$. On a $\exp \in D(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\sin \in D(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Par contre la fonction $\mathrm{abs} : x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0 si bien que $\mathrm{abs} \notin D(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On a cependant $\mathrm{abs} \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.*
- *Nous avons $(5n + 3^n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, l'ensemble des suites réelles.*

2) Parties d'un ensemble

Définition. *Soient E et F deux ensembles. On dit que E est inclus dans F (ou que E est une partie de F ou encore que E est un sous-ensemble de F), et on note $E \subset F$, si*

$$\forall x \in E, \quad x \in F.$$

Si E n'est pas inclus dans F, on note $E \not\subset F$.
Si $E \subset F$ et $E \neq F$, on dit que l'inclusion est stricte et on note $E \subsetneq F$.

Remarques :

- Pour montrer que E est inclus dans F, on se donne un élément x de E et on montre que x est un élément de F. On commence donc par écrire

- Tout ensemble est inclus dans lui-même.
- Par transitivité de l'implication, E, F et G sont des ensembles tels que $E \subset F$ et $F \subset G$, alors $E \subset G$.

Il résulte de la définition l'équivalence suivante :

Ne pas confondre appartenance et inclusion. Si $E = \{0; 1; 2\}$, alors $1 \in E$ et $\{1\} \subset E$

Proposition (double inclusion). *Si E et F sont deux ensembles, alors on a*

$$E = F \qquad \Longleftrightarrow \qquad (E \subset F \text{ et } F \subset E).$$

Pour montrer que deux ensembles E et F sont égaux, on montera souvent que l'un est inclus dans l'autre et vice versa. On dit qu'on procède par double inclusion.

Exemples :

- *Nous avons $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$.*
- *Si f est une fonction à valeurs réelles qui est dérivable sur $\mathbb{R}$, alors elle est continue sur $\mathbb{R}$. Ainsi $D(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subsetneq C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.*
- *Si P est une propriété portant sur les éléments d'un ensemble E, alors $\{x \in E \mid P(x)\}$ est une partie de E. Par exemple $\{x \in \mathbb{R} \mid 4x^2 + 5x - 3 > 0\} \subset \mathbb{R}$.*

On définit un ensemble qui ne contient aucun élément :

Définition. *On appelle ensemble vide, et on note $\varnothing$, l'ensemble ne contenant aucun élément. Il est inclus dans tout autre ensemble et il ne possède qu'une seul sous ensemble : lui-même.*

$\mathscr{P}(E)$ est simplement un ensemble qui contient toutes les parties possibles de E. On a donc $\varnothing \in \mathscr{P}(E)$, $E \in \mathscr{P}(E)$ et

$$\{x\} \in \mathscr{P}(E) \Longleftrightarrow \{x\} \subset E \Longleftrightarrow x \in E.$$

Définition. *Soit E un ensemble. On note $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. On a alors*

$$A \in \mathscr{P}(E) \qquad \Longleftrightarrow \qquad A \subset E.$$

Exemples :

3) Produit cartésien et familles

Soient E et F des ensembles non vides.

Le produit cartésien $E \times F$ se prononce « E croix F ».

Définition. *On appelle couple d'éléments de E et F la donnée d'un élément x de E puis d'un élément y de F, dans cet ordre. On le note (x, y).*

On appelle produit cartésien de E et F, et on note $E \times F$, l'ensemble des couples d'éléments de E et F.

Exemples :

-

Comme on le voit sur cet exemple, $E \times F \neq F \times E$ en général !

- *Le produit cartésien $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est l'ensemble des cordonnées des points du plan dans un repère orthonormé.*
- *$[\![1\,;6]\!] \times [\![1\,;6]\!]$ est l'univers que l'on associera à l'expérience aléatoire consistant à lancer deux dés à 6 faces consécutivement.*

Définition. *Plus généralement, donnons-nous $n \in \mathbb{N}^*$ et n ensembles $E_1, \ldots, E_n$.*

On appelle n-uplet d'éléments de $E_1, \ldots, E_n$ la donnée d'un élément x_1 de E_1, puis d'un élément x_2 de E_2, ... et d'un élément x_n de E_n, dans cet ordre. On le note $(x_1, \ldots, x_n)$.

On appelle produit cartésien de $E_1, \ldots, E_n$, et on note $E_1 \times \cdots \times E_n$, l'ensemble des n-uplet d'éléments de $E_1, \ldots, E_n$.

Si $E_1 = E_2 = \cdots = E_n = E$, alors on note E^n au lieu de $E_1 \times \cdots \times E_n = E \times E \times \cdots \times E$.

Ne pas confondre $(x_1, \ldots, x_n)$ avec l'ensemble $\{\, x_i \,|\, 1 \in [\![1\,;n]\!] \,\}$. Par exemple le triplet $(x_1, x_2, x_3) = (2, 1, 2)$ n'est pas l'ensemble $\{x_1; x_2; x_3\} = \{1; 2\}$.

Exemple : *On note $\mathbb{R}^n$ l'ensemble des n-uplets de réels, avec $n \in \mathbb{N}^*$.*

Remarque : La notion de produit cartésien permet aussi un raccourci de notations. Par exemple on pourra écrire « $\forall (x, y, z) \in E^2 \times F$ » au lieu de « $\forall x \in E,\, \forall y \in E, \forall z \in F$ ». Idem avec les « $\exists$ ».

On peut encore généraliser :

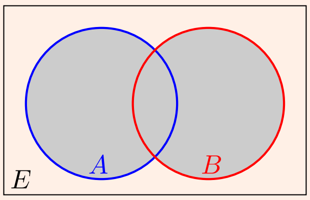
Définition. *Soit I un ensemble non vide (appelé ensemble d'indices) et E un autre ensemble non vide. On appelle famille d'éléments de E indexée par I la donnée, pour tout $i \in I$, d'un unique élément x_i de E. On la note $(x_i)_{i \in I}$.*

II Opérations sur les parties d'un ensemble

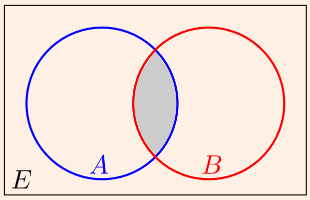
Dans toute la suite, E et F désignent des ensembles non vides.

1) Union et intersection

Définition. *Soient A et B deux parties de E. On définit les parties suivantes de E :*



$A \cup B = \{\, x \in E \,|\, x \in A \text{ ou } x \in B \,\}$,
l'union (ou réunion) de A et B.



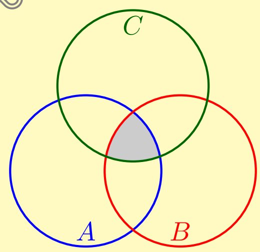
$A \cap B = \{\, x \in E \,|\, x \in A \text{ et } x \in B \,\}$,
l'intersection de A et B.

Remarque : Pour tout $x \in E$, nous avons donc

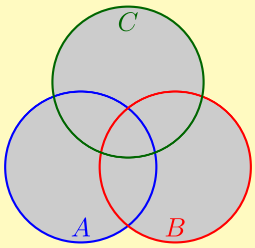
Définition. *Deux parties A et B de E sont dites disjointes si $A \cap B = \varnothing$. Dans ce cas, on dit que $A \cup B$ est une union disjointe.*

Attention de ne pas confondre distincts et disjoints :

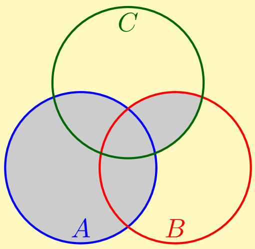
- A et B sont distincts (c'est-à-dire $A \neq B$) si et seulement si
$$(\exists x \in A,\, x \notin B) \text{ ou } (\exists x \in B,\, x \notin A).$$
- A et B sont disjoints si et seulement si $(\forall x \in A,\, x \notin B)$ et $(\forall x \in B,\, x \notin A)$.



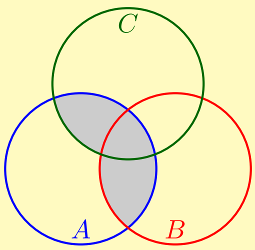
$A \cap B \cap C$



$A \cup B \cup C$



$(A \cup B) \cap (A \cup C) =$
$A \cup (B \cap C)$



$(A \cap B) \cup (A \cap C) =$
$A \cap (B \cup C)$

Proposition. *Soient A, B et C des parties de E.*

- *(commutativité)* $A \cup B = B \cup A$ *et* $A \cap B = B \cap A$,
- *(associativité)* $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ *et* $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$,
- *(distributivité)* $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ *et* $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
- *(idempotence)* $A \cap A = A$ *et* $A \cup A = A$,
- $\varnothing \cap A = \varnothing$ *et* $\varnothing \cup A = A$,
- $E \cap A = E$ *et* $E \cup A = E$,
- $(A \cap B) \subset A \subset (A \cup B)$.

$\rightsquigarrow$ Exercice.

Remarque : L'associativité de la réunion (resp. de l'intersection) nous permet d'écrire : $A \cup B \cup C$ (resp. $A \cap B \cap C$) au lieu de $A \cup (B \cup C)$ (resp. $A \cap (B \cap C)$).

Plus généralement, on définit :

Définition. *Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E (i.e. une famille d'éléments de $\mathcal{P}(E)$) indexée par un ensemble non vide I. On définit :*

- $\displaystyle\bigcup_{i \in I} A_i = \{\, x \in E \mid \exists i \in I,\ x \in A_i \,\}$, *l'union de la famille $(A_i)_{i \in I}$.*
- $\displaystyle\bigcap_{i \in I} A_i = \{\, x \in E \mid \forall i \in I,\ x \in A_i \,\}$, *l'intersection de la famille $(A_i)_{i \in I}$.*

Remarque : Si $I = [\![p \,;n]\!]$ avec p et n des entiers naturels tels que $p \leqslant n$, alors on note $\displaystyle\bigcup_{i=p}^{n}$ au lieu de $\displaystyle\bigcup_{i \in I}$ et $\displaystyle\bigcap_{i=p}^{n}$ au lieu de $\displaystyle\bigcap_{i \in I}$.

Exemples :

Proposition (distributivité). *Soient B une partie de E et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E. Nous avons :*

- ***distributivité de $\cap$ par rapport à $\cup$:*** $\displaystyle\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)\cap B=\bigcup_{i\in I}(A_i\cap B)$,
- ***distributivité de $\cup$ par rapport à $\cap$:*** $\displaystyle\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)\cup B=\bigcap_{i\in I}(A_i\cup B)$.

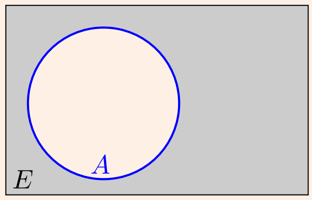
Démonstration. Montrons le premier point (l'autre est analogue).

□

2) Complémentaire

Définition. *Soit A une partie de E.*

L'ensemble $\complement_E A=\{x\in E\,|\,x\notin A\}$ est une partie de E appelée complémentaire de A dans E. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on le note simplement $\overline{A}$.

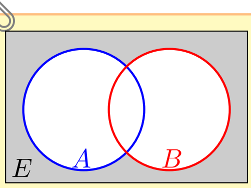


Remarque : Pour tout $x\in E$, nous avons donc

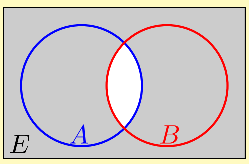
Proposition. *Soient A et B des parties de E. On a*

$$\overline{\varnothing}=E,\qquad \overline{E}=\varnothing,\qquad \overline{\overline{A}}=A,\qquad A\subset B\iff \overline{B}\subset\overline{A}.$$

⇝ Exercice.



$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$



$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

Proposition (Lois de Morgan). *Si A et B sont des parties de E, alors*

$$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}\qquad \text{et}\qquad \overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}.$$

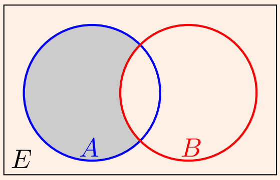
Plus généralement, si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille de parties de E indexée par un ensemble non vide I, alors

$$\overline{\bigcap_{i\in I}A_i}=\bigcup_{i\in I}\overline{A_i}\qquad \text{et}\qquad \overline{\bigcup_{i\in I}A_i}=\bigcap_{i\in I}\overline{A_i}.$$

Démonstration.

□

Définition (différence). *Soient A et B deux parties de E. L'ensemble $A\backslash B = A \cap \overline{B} = \{\, x \in E \,|\, x \in A \text{ et } x \notin B \,\}$ est une partie de E appelée différence de A et B. On l'appelle aussi « A privé de B » ou encore, dans le cas où $B \subset A$, « complémentaire de B dans A » (et on note aussi $\complement_A B$).*



III Applications

Soient E, F, G et H des ensembles non vides.

1) Notion d'application

Définition. *Définir une application f de E dans F consiste à associer à tout x dans E un unique élément y de F, noté $f(x)$ et appelé image de x. Pour tout y dans F, tout élément x de E vérifiant $y = f(x)$ est appelé antécédent de y par f.*

L'ensemble E est appelé ensemble de départ de f. L'ensemble F est appelé ensemble d'arrivée de f.

On note $f : E \longrightarrow F$ pour désigner une application f de E dans F. On dit aussi f est une application définie sur E et à valeurs dans F. On note aussi $f \;:\; \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$

ou $f : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$ ou encore $f : x \in E \longmapsto f(x) \in F$ pour désigner une application f de E dans F qui à $x \in E$ associe $f(x) \in F$.

On note F^E ou $\mathcal{A}(E, F)$ l'ensemble des applications de E dans F.

Remarques :

- Dans l'expression $x \longmapsto f(x)$, la lettre x est muette et peut donc être remplacée par une autre variable.
- Ne pas confondre une application f avec la formule (si elle existe) donnant $f(x)$ en fonction de x. Ainsi on écrira jamais « Soit $f(x)$ une application » mais plutôt « Soit f une application qui à x associe $f(x)$ ».
- Si y est l'image de x par f, alors x est un antécédent de y par f.
- $f : E \longrightarrow F$ ne veut pas dire que tous les éléments de F sont atteints.
  Il peut ne pas exister d'antécédent par f à un élément y de F. Il peut aussi en exister plus d'un. Par contre un élément x de E admet une seule image par f.
- On parle souvent de fonction plutôt que d'application. En fait la notion de fonction est plus générale que la notion d'application : une fonction associe à tout élément de l'ensemble de départ au plus un élément de l'ensemble d'arrivée (possiblement aucun). Lorsqu'on étudiera une fonction f cette année, on commencera toujours par déterminer son domaine de définition D_f. On se ramènera à l'étude de l'application f définie sur $E = D_f$.
- Une famille d'éléments d'un ensemble E indexée par un ensemble I est une autre façon de noter une application de I dans E.
- Soient E, F et G trois ensembles tels que $F \subsetneq G$. Soit f une application de E dans F. On peut encore dire que f est une application de E dans G. Mais ce n'est plus tout à fait la même application :

Définition. *Deux applications f et g sont égales si et seulement si elles ont le même ensemble de départ (notons-le E), le même ensemble d'arrivée et, pour tout $x \in E$, $f(x) = g(x)$.*

Soit B un ensemble. Si il existe un ensemble A et une application f définie sur A telle que $B = f(A) = \{f(x) \,|\, x \in A\}$, alors on dit que l'ensemble B est défini sous forme paramétrique (nous utiliserons essentiellement ce terme dans le chapitre *Introduction des espaces vectoriels*).

Définition (image). *Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F. Soit A une partie de E. On appelle image de A par f et on note $\{\, f(x) \,|\, x \in A \,\}$ ou encore $f(A)$ l'ensemble*

$$\left\{\, y \in F \,\middle|\, \exists x \in A,\, y = f(x) \,\right\},$$

des valeurs prises par $f(x)$ lorsque x parcourt A.

Exemple :

Définition (application identité). *Soit E un ensemble. L'application* $\mathrm{Id}_E \;:\; \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array}$ *est appelée application (ou fonction) identité de E.*

Exemples :

Définition (application constante). *On dit qu'une application $f : E \longrightarrow F$ est constante si elle vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes :*

- *pour tout $(x, y) \in E^2$, $f(x) = f(y)$.*
- *il existe $\alpha \in F$ tel que, pour tout $x \in E$, $f(x) = \alpha$*
  (on dit alors que f est l'application constante égale à α).

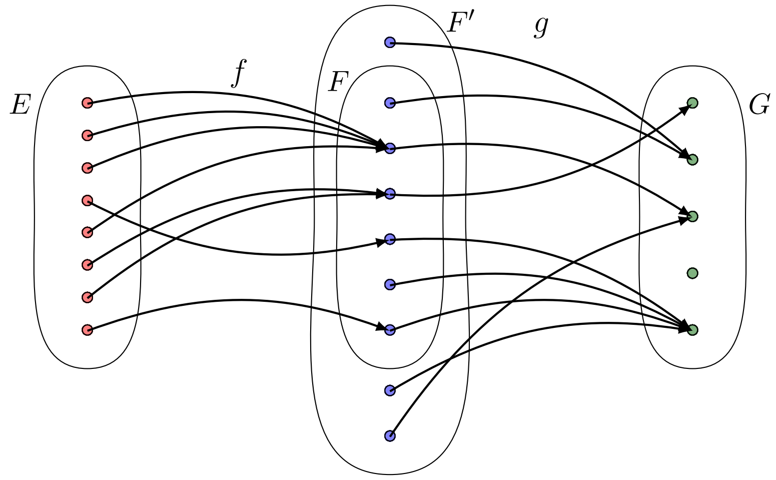
2) Composition les applications

Définition. *Soient E, F, F' et G des ensembles avec $F \subset F'$. Si $f : E \longrightarrow F$ et $g : F' \longrightarrow G$ sont des applications, alors on définit la composée de f par g, et on note $g \circ f$, l'application*

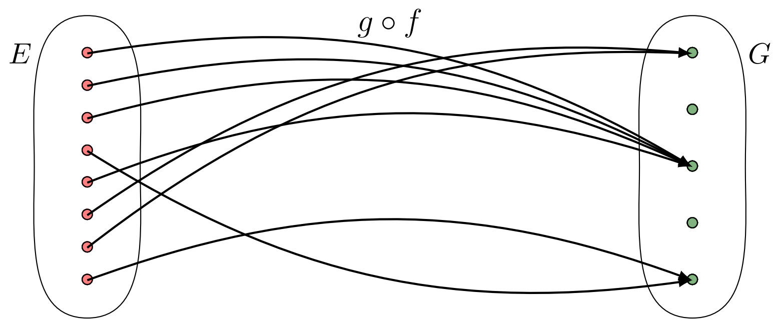
$$g \circ f \;:\; \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & g\big(f(x)\big) \end{array}.$$

Remarques :

- Si F n'est pas inclus dans F', il faut au moins que $f(E) \subset F'$ pour pouvoir définir l'application $g \circ f$.
- Si f est une application de E dans F, alors



donc



Exemple :

Proposition (associativité de la composition). *Soient $f \in F^E$, $g \in G^F$ et $h \in H^G$. Nous avons*

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

On note alors plus simplement $h \circ g \circ f$.

Démonstration. Par définition $h \circ g$ est une application de F dans H donc $(h \circ g) \circ f$ est une application de E dans H. De même $h \circ (g \circ f)$ est une application de E dans H. On a bien l'égalité des ensembles de départ et l'égalité des ensembles d'arrivée. Ensuite, donnons-nous $x \in E$ et posons $y = f(x) \in F$. Nous avons

$$\big((h \circ g) \circ f\big)(x) = (h \circ g)(f(x)) = (h \circ g)(y) = h(g(y)) = h((g \circ f)(x)) = \big(h \circ (g \circ f)\big)(x).$$

Ainsi $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$. □

3) Injections, surjections, bijections

Définition. *Une application $f : E \longrightarrow F$ est dite injective (ou une injection) de E dans F si tout élément y de F admet **au plus** un antécédent par f dans E.*

Définition quantifiée :

ou encore

Définition. *Une application $f : E \longrightarrow F$ est dite surjective (ou une surjection) de E dans F si tout élément y de F admet **au moins** un antécédent par f dans E.*

Définition quantifiée :

Définition. *Une application $f : E \longrightarrow F$ est dite bijective (ou une bijection) de E dans F si elle est injective et surjective, c'est-à-dire si tout élément y de F admet un unique antécédent par f dans E.*

Définition quantifiée :

Méthodes de preuve :

- Pour montrer qu'une application $f : E \longrightarrow F$ est injective, on a deux options :
  - On écrit « Soient x et y dans E tels que $f(x) = f(y)$ » et on montre que $x = y$.
  - On écrit « Soient x et y dans E tels que $x \neq y$ » et on montre que $f(x) \neq f(y)$.
- Pour montrer qu'une application $f : E \longrightarrow F$ n'est injective, on cherche deux éléments distincts de E qui ont la même image.
- Pour montrer qu'une application $f : E \longrightarrow F$ est surjective, on écrit « Soit $y \in F$ » puis on cherche $x \in E$ tel que $y = f(x)$.
- Pour montrer qu'une application $f : E \longrightarrow F$ n'est pas surjective, on cherche un élément y de E qui n'admet pas d'antécédent par f.
- Pour montrer qu'une application $f : E \longrightarrow F$ est bijective, on peut :
  - montrer qu'elle est injective et bijective,
  - montrer qu'elle admet une réciproque (cf. paragraphe suivant).

Une application f est surjective de E dans F si et seulement si $F \subset f(E)$ si et seulement si $f(E) = F$.
Autrement dit toute application f de E dans $f(E)$ est surjective. Et donc tout application f injective de E dans $f(E)$ est une bijection.

Remarque : Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ (avec I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$) est strictement monotone sur I, alors f est injective.

On en déduit qu'une fonction f strictement monotone sur I est bijective de I dans $f(I)$. Ce résultat est englobé dans le théorème de la bijection que l'on verra dans le chapitre 14 (l'hypothèse de continuité de f nous servira à affirmer que $f(I)$ est un intervalle).

Exemples :

- *L'application* $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ r & \longmapsto & 3r+1 \end{array}$

  L'application $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ r & \longmapsto & 3r+1 \end{array}$

- *L'application* $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$

  L'application $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$

  L'application $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$

  L'application $p : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$

- *L'application* $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$

  L'application $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$

- *Notons E l'ensemble des élèves de classe de H1B (2022/2023), P l'ensemble des prénoms et N l'ensemble des noms de familles.*
  - *L'application $f_{\text{H1B}} : E \longrightarrow P$ qui à tout élève de la classe de H1B associe son prénom*
  - *L'application $g_{\text{H1B}} : E \longrightarrow P \times N$ qui à tout élève de la classe de H1B associe le couple constitué de son prénom et de son nom de famille*
  - *L'application $h_{\text{H1B}} : E \longrightarrow \{$janvier ;février ;...;décembre$\}$ qui à tout élève de la classe de H1B associe son mois de naissance*

- *L'application* $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{R}} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f(0) \end{array}$

- *L'application* $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (y, x+y, x) \end{array}$

Proposition. *Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$.*

1. *Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective de E dans G.*
2. *Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective de E dans G.*
3. *Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective de E dans G.*

Démonstration.

□

Définition. *On dit que deux ensembles E et F sont en bijection si il existe une bijection de E dans F ou une bijection de F dans E.*

Exemple :

4) Réciproque d'une bijection

Définition. *Soit f une bijection de E dans F. On appelle réciproque de f et on note f^{-1} l'application de F dans E qui à tout élément $y \in F$ associe l'unique antécédent de y par f dans E. On a donc*

$$\forall (x,y) \in E \times F, \qquad \big(y = f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad x = f^{-1}(y)\big).$$

En particulier, la réciproque f^{-1} d'une bijection f de E dans F vérifie donc

$\forall x \in E,\ f^{-1} \circ f(x) = x$

$\forall y \in F,\ f \circ f^{-1}(y) = y.$

Théorème. *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *f est une bijection de E dans F.*
2. *Il existe $g : F \longrightarrow E$ telle que*
$$\forall (x,y) \in E \times F, \qquad \big(y = f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad x = g(y)\big).$$
3. *Il existe $g : F \longrightarrow E$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$.*

Dans ce cas, l'application g est uniquement déterminée : il s'agit de la fonction réciproque de f. De plus l'application f^{-1} est elle-même bijective et son application réciproque est f.

DÉMONSTRATION. Raisonnons par équivalences multiples.

$\underline{1 \Rightarrow 2.}$ La fonction g recherchée est f^{-1}, par définition de la réciproque de f.

$\underline{2 \Rightarrow 3.}$ Supposons qu'il existe $g : F \longrightarrow E$ vérifiant la deuxième condition.

— Soit $x \in E$. On a $f(x) = f(x)$ donc $x = g(f(x)) = g \circ f(x)$. Ainsi $g \circ f = \mathrm{Id}_E$.

— Soit $y \in F$. On a $g(y) = g(y)$ donc $y = f(g(y)) = f \circ g(y)$. Ainsi $f \circ g = \mathrm{Id}_F$.

Par conséquent la troisième assertion est vérifiée par g.

$\underline{3 \Rightarrow 1.}$ Supposons qu'il existe $g : F \longrightarrow E$ vérifiant la troisième condition. Montrons que f est à la fois injective et surjective.

— Soit $(x, x') \in E^2$ tel que $f(x) = f(x')$. On a alors $g(f(x)) = g(f(x'))$. Puisque $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ par hypothèse, on en déduit que $x = g \circ f(x) = g \circ f(x') = x'$. Ainsi f est injective.

— Soit $y \in F$. Puisque $f \circ g = \mathrm{Id}_F$, on a $y = f \circ g(y) = f(g(y))$. Ainsi $g(y)$ est un antécédent de y par f dans E. Ainsi f est surjective.

Nous en déduisons que f est bijective.

La symétrie entre f et g dans le raisonnement précédent nous assure que g est aussi une bijection et que f et g sont réciproques l'une de l'autre. $\square$

Exemple : *Considérons la fonction* $\mathrm{sh} : x \longmapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Proposition. *Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ des applications bijectives. Alors $g \circ f$ est bijective de E dans G et $\left(g \circ f\right)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.*

DÉMONSTRATION. Nous avons

$$(g \circ f) \circ \left(f^{-1} \circ g^{-1}\right) = g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} = g \circ \mathrm{Id}_F \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = \mathrm{Id}_G,$$

$$\left(f^{-1} \circ g^{-1}\right) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f = f^{-1} \circ \mathrm{Id}_F \circ f = f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$$

et donc $f^{-1} \circ g^{-1}$ est bien la bijection réciproque de $g \circ f$. $\square$