Chapitre 8

Limite d'une suite réelle

I Limite d'une suite

Dans toute la suite, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désignent des suites réelles.

1) Suites convergentes et divergentes

Définition. *Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet ℓ pour limite (ou converge vers ℓ) si tout intervalle I ouvert contenant ℓ contient u_n pour tous les indices $n \in \mathbb{N}$ sauf un nombre fini d'entre eux.*

De manière quantifiée, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geqslant n_0 \quad \Longrightarrow \quad |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon).$$

Si une suite admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$, on dit qu'elle converge (ou qu'elle est convergente). Sinon on dit qu'elle diverge (ou qu'elle est divergente).

Déterminer la nature d'une suite signifie déterminer si elle converge ou si elle diverge.

Dire que I contient u_n pour tous les indices $n \in \mathbb{N}$ sauf un nombre fini d'entre eux revient exactement à dire que tous les termes de la suite appartiennent à I à partir d'un certain rang.

Pour raccourcir les notations, on écrit souvent « $\forall n \geqslant n_0$ » au lieu de

« $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow$ ».

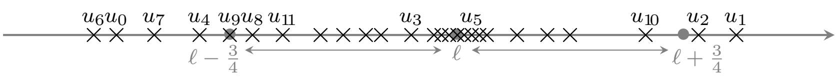
Remarques :

- En quoi les deux définitions sont-elles équivalentes ? La définition quantifiée signifie que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang n_0 tel que, à partir du rang n_0 (pour $n \geqslant n_0$), tous les termes u_n appartiennent à l'intervalle $[\ell - \varepsilon\,;\ell + \varepsilon]$. L'intervalle $[\ell - \varepsilon\,;\ell + \varepsilon]$ contient ℓ mais il n'est pas ouvert. Mais tout intervalle ouvert I contenant ℓ contient bien un intervalle de la forme $[\ell - \varepsilon\,;\ell + \varepsilon]$ avec $\varepsilon > 0$.
- Aussi remplacer « $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$ » par « $|u_n - \ell| < \varepsilon$ » dans la définition ne change rien. L'important est que l'on puisse considérer un intervalle aussi resserré autour de ℓ que possible (et qu'à chaque fois on y trouve tous les termes de la suite à partir d'un certain rang).

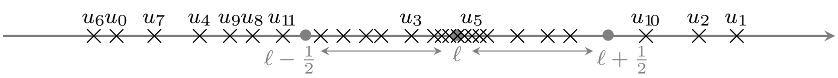
  ⚠ Mais en changeant ε, on change n_0 a priori puisque (c'est implicite étant donné l'ordre des quantificateurs dans la définition) n_0 dépend de ε.

  Sur les deux dessins ci-dessous, on a représenté sur la droite réelle les termes successifs d'une même suite qui converge vers ℓ (avec des $\times$).

  — Avec le choix de $\varepsilon = 3/4$, on constate que tous les termes de la suite appartiennent à $[\ell - \varepsilon\,;\ell + \varepsilon]$ à partir du rang $n_0 = 8$.



  — Avec le choix de $\varepsilon = 1/2$, on constate que tous les termes de la suite appartiennent à $[\ell - \varepsilon\,;\ell + \varepsilon]$ à partir du rang $n_0 = 12$.



Si par exemple, $I =]a;b[$ avec a un réel tel que $a < \ell < b$, alors

$$\varepsilon = \min\left(\frac{\ell - a}{2}, \frac{b - \ell}{2}\right)$$

vérifie $[\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon] \subset I$. C'est analogue pour les autres types d'intervalles ouverts.

Intuitivement, si on diminue la valeur de ε, on diminue l'amplitude de l'intervalle $[\ell - \varepsilon\,;\ell + \varepsilon]$ et donc le rang n_0 à partir duquel tous les termes de la suite sont dans l'intervalle $[\ell - \varepsilon\,;\ell + \varepsilon]$ sera plus grand.

Exemple :

Parmi les suites divergentes, on trouve les suites qui tendent vers $+\infty$ ou $-\infty$:

Remplacer « $u_n \geqslant A$ » par « $u_n > A$ » dans la définition ne change rien.
Pour raccourcir les notations, on écrit souvent « $\forall n \geqslant n_0$ » au lieu de

« $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \Rightarrow$ ».

Définition (suites tendant vers $\pm\infty$). *On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ (ou* ***diverge*** *vers $+\infty$) si*

$$\forall A > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geqslant n_0 \quad \Longrightarrow \quad u_n \geqslant A).$$

On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ (ou diverge vers $-\infty$) si

$$\forall A < 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geqslant n_0 \quad \Longrightarrow \quad u_n \leqslant A).$$

Remarque : Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ si et seulement si la suite $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$.

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ si et seulement si, quel que soit le seuil $A > 0$ que l'on se donne, à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite dépassent ce seuil.

Mais il y a des suites divergentes qui ne tendent ni vers $+\infty$ ni vers $-\infty$.

Par exemple, $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite (cf. paragraphe suivant) tout comme $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ (cf. exercice 7).

2) Premières propriétés

En d'autres termes, si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell'$ alors $\ell = \ell'$.

Proposition (unicité de la limite). *Si une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$ alors cette limite est unique. On appelle alors ℓ la limite de la suite et on note $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ou $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.*

Démonstration.

□

Il est immédiat qu'une suite ne peut pas à la fois converger vers un réel et tendre vers $\pm\infty$ ni à la fois tendre vers $+\infty$ et $-\infty$.

En particulier, si

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell,$$

alors $-u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\ell$.

Proposition. *Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On a*

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \quad \Longleftrightarrow \quad u_n - \ell \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \Longleftrightarrow \quad |u_n - \ell| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Démonstration. On constate que les définitions quantifiées de ces trois convergences sont exactement les mêmes. □

Proposition. *Si les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne diffèrent que d'un nombre fini de termes, alors elles ont la même nature. De plus, sous réserve d'existence, elles admettent la même limite*

Démonstration. On augmente éventuellement n_0 dans la définition de telle sorte que, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n = v_n$. □

Quitte à diminuer n_0 dans la définition, on a aussi

$$u_{n-p} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell.$$

Lemme. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite admettant une limite $\ell \in \mathbb{R}\cup\{-\infty;+\infty\}$. Pour tout $p\in\mathbb{N}^*$, on a $u_{n+p} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $u_{pn} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.*

Démonstration. On applique la définition d'une suite admettant une limite (finie ou infinie) et on remarque que, si $n \geqslant n_0$, alors $n+p \geqslant n_0$ et $np \geqslant n_0$. □

Proposition. *Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R}\cup\{-\infty;+\infty\}$ si et seulement si les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ admettent toutes les deux ℓ pour limite.*

Démonstration. Supposons que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. Le lemme précédent garantit que $u_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ puis que $u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. Réciproquement, supposons que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers $\ell\in\mathbb{R}$ (les cas où $\ell=\pm\infty$ sont analogues). Donnons-nous $\varepsilon>0$. Il existe $n_0\in\mathbb{N}$ et $n_0'\in\mathbb{N}$ tels que

$$\forall n \geqslant n_0, \quad |u_{2n}-\ell| \leqslant \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \forall n \geqslant n_0', \quad |u_{2n+1}-\ell| \leqslant \varepsilon.$$

Posons $N=\max(2n_0, 2n_0'+1)$. On a donc, pour tout $n\geqslant N$, $|u_n-\ell|\leqslant\varepsilon$. Par conséquent $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ. □

Insistons sur la contraposée du sens direct de l'implication : si l'une des suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite ou si elles n'ont pas la même limite, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge. Par exemple si pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=(-1)^n$, alors $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1 et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers -1. Par conséquent $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas.

3) Exemples fondamentaux

Théorème.

1. *Soit $a\in\mathbb{R}$. Une suite constante ou stationnaire à a converge vers a.*
2. *Si $\alpha>0$, alors $\dfrac{1}{n^\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.*
3. *Si $q\in\,]-1\,;1[$, alors $q^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.*

Démonstration.

□

Théorème.

1. *Si $\alpha>0$, alors $n^\alpha \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.*
2. *Si $\beta>0$, alors $(\ln(n))^\beta \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.*
3. *$n! \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.*
4. *Si $q>1$, alors $q^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.*

Si $\alpha<0$, $-\alpha>0$ donc

$$n^\alpha = \frac{1}{n^{-\alpha}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Si $\alpha=0$, alors

$$n^\alpha = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

DÉMONSTRATION.

□

4) Limites et relation d'ordre

Proposition (HP mais très classique).

1. *Une suite réelle convergente est bornée.*
2. *Une suite qui tend vers $+\infty$ est minorée et non majorée.*
3. *Une suite qui tend vers $-\infty$ est majorée et non minorée.*

DÉMONSTRATION.
1. Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

2. Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tende vers $+\infty$. Il existe alors $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant 1$. Posons $m = \min(1, u_0, u_1, \ldots, u_{n_0-1})$. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant m$. Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée. Raisonnons par l'absurde et supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée. Il existe alors $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant M$. Mais $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ donc il existe $n_0' \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0'$, $u_n \geqslant M + 1 > u_n$. C'est absurde. Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée
3. On applique le point 2 à la suite $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. □

En particulier, si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R}_+^*$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $\dfrac{\ell}{2} < u_n < 2\ell$.

Proposition. *Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$.*

1. *Si a et b sont des réels tels que $\ell \in]a\,;b[$, alors les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartiennent à $]a\,;b[$ à partir d'un certain rang.*
2. *Si $\ell > 0$ ou $\ell = +\infty$, alors les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont strictement positifs à partir d'un certain rang.*
3. *Si $\ell < 0$ ou $\ell = -\infty$, alors les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont strictement négatifs à partir d'un certain rang.*

Dans le cas où ℓ est réel, on pouvait aussi utiliser la première définition de la limite et dire que $]a\,;b[$, $\mathbb{R}_+^*$ puis $\mathbb{R}_-^*$ sont des intervalles ouverts contenant ℓ.

4. *Si $\ell \neq 0$, alors les termes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont non nuls à partir d'un certain rang.*

DÉMONSTRATION.

La preuve du point 3 est analogue à celle du point 2. Le point 4 est une conséquence immédiate des points 2 et 3. □

Pour utiliser ce théorème, on doit auparavant avoir montré la convergence des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. La convergence de ces suites est une **hypothèse** qu'il faut prouver **avant** d'appliquer ce théorème.

Théorème (Les inégalités larges passent à la limite). *Supposons qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \leqslant v_n$. Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell'$, alors $\ell \leqslant \ell'$.*

DÉMONSTRATION.

□

Dans ce paragraphe, on a donc vu que l'on peut transférer des propriétés d'ordre sur la limite aux termes de la suite (à partir d'un certain rang) et vice-versa : des propriétés d'ordre sur les termes de la suite se transfèrent sur la limite. Ces deux résultats ne sont PAS des théorèmes d'existence de limite, contrairement à ceux du paragraphe suivant.

LES INÉGALITÉS STRICTES NE PASSENT PAS À LA LIMITE.

Prenons l'exemple de $u_n = 1/(n+2)$ et $v_n = 1/(n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < v_n$ mais pourtant leurs limites sont égales (à 0).

Corollaire. *Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ. Soit $m \in \mathbb{R}$.*

1. *Supposons que, pour tout n assez grand, $u_n \leqslant m$. Alors $\ell \leqslant m$.*
2. *Supposons que, pour tout n assez grand, $m \leqslant u_n$. Alors $m \leqslant \ell$.*

Remarque : En particulier, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ et si $u_n \geqslant 0$ pour n assez grand, alors $\ell \geqslant 0$. Cependant, si $u_n > 0$ pour n assez grand, on ne peut pas conclure que $\ell > 0$, par exemple si $u_n = 1/n$. Les inégalités strictes ne passent pas à la limite ! Tout ce qu'on peut dire est que $\ell \geqslant 0$: en poussant un peu, on peut dire que le passage à la limite transforme les inégalités strictes en inégalités larges.

5) Théorèmes d'encadrement et de comparaison

On parle aussi du « théorème des gendarmes » mais on lui préfèrera « théorème d'encadrement ».

Théorème (encadrement). *Supposons que*

- *Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.*
- *Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite $\ell \in \mathbb{R}$.*

Alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Démonstration.

□

Lorsqu'on applique l'un de ces trois résultats, on mentionne le théorème d'encadrement. Le premier lui est d'ailleurs équivalent.

Corollaire. *Supposons que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Soit $\ell \in \mathbb{R}$.*

1. *Si pour tout n assez grand, $|u_n - \ell| \leqslant v_n$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.*
2. *Si pour tout n assez grand, $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.*
3. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.*

$\rightsquigarrow$ Exercice.

Exemples :

Théorème ($\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ (HP)). *Pour tout réel x, il existe une suite de nombres rationnels qui converge vers x.*

Dans le cas des limites infinies, une seule inégalité suffit !

Théorème (comparaison). *Supposons qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \leqslant v_n$. On a alors*

1. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.*
2. *Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$.*

Démonstration. Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tende vers $+\infty$. Soit $A \in \mathbb{R}$. Il existe alors $n_0' \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0'$, $u_n \geqslant A$. Ainsi, pour tout $n \geqslant \max\{n_0, n_0'\}$, $v_n \geqslant A$. Par conséquent $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$. L'autre point est analogue. $\square$

Avec la convention que

$$|+\infty| = |-\infty| = +\infty.$$

Corollaire. *Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$, alors $|u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |\ell|$.*

Démonstration. Si $\ell \in \mathbb{R}$, on a $||u_n| - |\ell|| \leqslant |u_n - \ell| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (par inégalité triangulaire renversée). Si $\ell = +\infty$, $|u_n| \geqslant u_n$. Si $\ell = -\infty$, $|u_n| \geqslant -u_n$. Dans tous les cas, on conclut avec le théorème d'encadrement. $\square$

II Opérations sur les suites admettant une limite

Ainsi, si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui converge vers $\ell \in \mathbb{R}_+^*$, 0^+ ou $+\infty$, $v_n > 0$ pour n assez grand (pratique si on veut élever à une puissance, cf. ci-dessous). Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui converge vers $\ell \in \mathbb{R}_-^*$, 0^- ou $-\infty$, alors $v_n < 0$ pour n assez grand. Dans les deux cas, $v_n \neq 0$ pour n assez grand donc les termes de la suite $(1/v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bien définis à partir d'un certain rang.

Définition (limites 0^+ et 0^-). *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et si il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n > 0$ (respectivement $u_n < 0$), alors on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0^+ (respectivement vers 0^-).*

1) Suites et composition par une fonction

Nous admettons provisoirement les propositions suivantes, que nous montrerons dans le chapitre 13.

Proposition. *Soit $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(u_n)$ est bien définie pour tout n assez grand. Soit a un point ou une extrémité (éventuellement infinie) de I telle que $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$. Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$, alors $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.*

Exemple :

Proposition. *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction <u>continue</u> en un point a de I. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dont les termes appartiennent à I à partir d'un certain rang. Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$, alors $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(a)$.*

Exemple :

2) Opérations algébriques

Proposition.

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n + v_n) :$$

$\lim_{n\to+\infty} v_n$ \ $\lim_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
ℓ'	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	F.I.
$-\infty$	$-\infty$	F.I.	$-\infty$

On parle de forme indéterminée (et on note F.I. dans les tableaux) quand on ne peut pas déterminer la limite d'une opération sur les suites de manière générale. Dans ce cas, il faut faire une étude au cas par cas.

- « $\infty - \infty$ » :

$$(n^2+2)-(n^2+1) = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1,$$

$$n - n^2 = n^2\left(\frac{1}{n}-1\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty.$$

- « $0 \times \infty$ » :

$$\frac{1}{n+1}\times(n^2+n) = n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty,$$

$$\frac{1}{n^2+1}\times n^2 = \frac{1}{1+\frac{1}{n^2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

- « $\frac{0}{0}$ » :

$$\frac{1/n^2}{1/n} = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

$$\frac{1/\sqrt{n}}{1/n} = \sqrt{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

- « $\frac{\infty}{\infty}$ » :

$$\frac{n^5}{n} = n^4 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty,$$

$$\frac{n+1}{n^3} = \frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Attention « $\frac{0}{\infty}$ » et « $\frac{\infty}{0}$ » ne sont pas des formes indéterminées.

$\lim\limits_{n\to+\infty}(\lambda u_n)$:

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
$\lambda > 0$	$\lambda\ell$	$+\infty$	$-\infty$
$\lambda = 0$	0	0	0
$\lambda < 0$	$\lambda\ell$	$-\infty$	$+\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n v_n)$:

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ \ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell = 0$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' > 0$	$\ell\ell'$	$\ell\ell'$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' < 0$	$\ell\ell'$	$\ell\ell'$	0	$-\infty$	$+\infty$
$\ell' = 0$	0	0	0	*F.I.*	*F.I.*
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	*F.I.*	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	*F.I.*	$-\infty$	$+\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{v_n}$:

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\ell' \neq 0$	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{v_n}$	$\frac{1}{\ell'}$	$+\infty$	$-\infty$	0^+	0^-

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n}$:

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ \ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell = 0$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' > 0$	$\frac{\ell}{\ell'}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' < 0$	$\frac{\ell}{\ell'}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$-\infty$	$+\infty$
0^+	$+\infty$	$-\infty$	*F.I.*	$+\infty$	$-\infty$
0^-	$-\infty$	$+\infty$	*F.I.*	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	0^+	0^-	0	*F.I.*	*F.I.*
$-\infty$	0^-	0^+	0	*F.I.*	*F.I.*

Démonstration. Cela fait soixante-six cas à traiter (mais seulement une quarantaine en fait car certains sont symétriques). Montrons en deux :

- Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell' \in \mathbb{R}$, alors $u_n v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell\ell'$.

  On se donne $\varepsilon > 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par inégalité triangulaire, on a

$$|u_n v_n - \ell\ell'| = |u_n(v_n - \ell') + u_n\ell' - \ell\ell'| \leqslant |u_n||v_n - \ell'| + |\ell'||u_n - \ell|.$$

  — $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon'$ (pour un certain $\varepsilon' > 0$ dépendant de ε et que l'on déterminera plus tard).

  — Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, elle est bornée (disons par $M > 0$).

  — $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell'$ donc il existe $n'_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n'_0$, $|v_n - \ell'| \leqslant \varepsilon''$ (pour un certain $\varepsilon'' > 0$ dépendant de ε et que l'on déterminera plus tard).

Il n'est pas utile de retenir cette preuve qui est assez technique et n'est pas dans l'esprit du programme. Nous la donnons à titre culturel.

Posons $N = \max\{n_0; n_0'\}$. Pour tout $n \geqslant N$, on a

$$|u_n v_n - \ell\ell'| \leqslant M|v_n - \ell'| + |\ell'||u_n - \ell| \leqslant M\varepsilon'' + |\ell'|\varepsilon'.$$

Pas $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{2|\ell'|}$ car ℓ' est peut-être nul.

On choisit par exemple $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{2(|\ell'|+1)}$ et $\varepsilon'' = \dfrac{\varepsilon}{2M}$ et alors, pour tout $n \geqslant N$, $|u_n v_n - \ell| \leqslant \varepsilon$. Ainsi $u_n v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell\ell'$.

- Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0^-$, alors $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$.

  Donnons-nous $A < 0$.

  — Puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $+\infty$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant -A$.

  — Puisque $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0^-, il existe $n_0' \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0'$, $-1 \leqslant v_n < 0$. Ainsi $v_n \neq 0$ et $\dfrac{-1}{v_n} \geqslant 1$.

  Par conséquent, pour tout $n \geqslant \max\{n_0; n_0'\}$, $-\dfrac{u_n}{v_n} \geqslant -A$ et donc $\dfrac{u_n}{v_n} \leqslant A$. Ainsi $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$. □

Exemples :

C'est très classique : lorsqu'on a une somme (ou un quotient de sommes) de termes conduisant à une forme indéterminée, on factorise par le terme « le plus gros » (ici aussi bien au numérateur qu'au dénominateur).

- *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = \dfrac{2n^3 - 7n^2 - 12}{\sqrt{n^6 + n^5 + 1}}$. Déterminons la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

À première vue c'est une forme indéterminée du type « $\infty - \infty$ ». On peut penser à factoriser par n dans chaque racine (mais cela ne va rien donner). Autre astuce classique lorsqu'on a des différences de racines : multiplier et diviser par la quantité conjuguée.

- *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $v_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n+1789}$.*

Corollaire. *Une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}^*$ tend vers $+\infty$ si $r > 0$ et vers $-\infty$ si $r < 0$.*

Corollaire.

- *Une suite géométrique de raison $q \in \,]-1\,;1[$ converge vers 0.*
- *Une suite géométrique de raison $q \in \,]1\,;+\infty[$ et de terme initial $x \in \mathbb{R}^*$ tend vers $+\infty$ si $x > 0$ et vers $-\infty$ si $x < 0$.*
- *Une suite géométrique de raison $q \in \,]-\infty\,;-1]$ et de terme initial non nul n'admet pas de limite.*

On rappelle que x^α a un sens :
- pour tout $x \in \mathbb{R}$, si $\alpha \in \mathbb{N}$.
- pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, si $\alpha \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}$.
- pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, si $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ (mais on pose $0^\alpha = 0$ si $\alpha > 0$).

3) Passage à la puissance

Dans les exemples du paragraphe précédent, on est passé à la racine dans des limites. Plus généralement on a :

Proposition. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Supposons que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$.*

- *Si ℓ^α existe et si u_n^α est bien définie pour n assez grand, alors $u_n^\alpha \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell^\alpha$.*
- *Si $\ell = +\infty$ et si $\alpha > 0$, alors $u_n^\alpha \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.*
- *Si $\ell = +\infty$ et si $\alpha < 0$, alors $u_n^\alpha \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.*
- *Si $\ell = 0^+$ et si $\alpha < 0$, alors $u_n^\alpha \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.*

Démonstration. Dans le cas où $\alpha \in \mathbb{Z}$, ce théorème est une conséquence des propriétés des limites de produits et quotients de limites (cf. paragraphe précédent). Dans le cas où $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, cela découle du paragraphe II.1. $\square$

Mais en fait ce sont les mêmes formes indéterminées que précédemment puisque « $0^0 = e^{0\times\infty}$ », « $\infty^0 = e^{0\times\infty}$ » et « $1^\infty = e^{\infty\times 0}$ ».

⚠ Il y a d'autres types de formes indéterminées qui apparaissent lorsqu'on élève à une puissance qui n'est pas fixe : « 0^0 », « ∞^0 » et « 1^∞ ».

Exemples :

⚠ L'erreur classique est de dire que $1 + \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et $1^n = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

C'est une erreur très grave ! Le raisonnement précédent est faux puisque la puissance n'est pas fixe (elle dépend aussi de n). La bonne réponse est :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e.$$

Il faut absolument connaître et retenir la démonstration de cette limite : c'est un immense classique.

4) Croissances comparées

On dit que « les puissances (n^a, $a > 0$) l'emportent sur les logarithmes ($(\ln(n))^b$, $b > 0$) et que les suites géométriques ou exponentielles (q^n, $q > 1$) l'emportent sur les puissances (n^a, $a>0$) ». On préférera utiliser le terme croissances comparées.

Théorème (croissances comparées).

1. *Pour tous $a > 0$ et $b > 0$, $\dfrac{(\ln(n))^b}{n^a} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.*
2. *Pour tous $q \in \,]1\,;+\infty[$ et $a > 0$, $\dfrac{n^a}{q^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.*

   Pour tous $q \in \,]0\,;1[$ et $a > 0$, $n^a q^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

3. *Pour tout* $q \in]1\,;+\infty[$, $\dfrac{q^n}{n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
4. $\dfrac{n!}{n^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Démonstration. Nous montrerons les points 1 et 2 dans le chapitre 13.

□

Exemples :

Comme « les exponentielles l'emportent sur les puissances » qui « l'emportent sur les logarithmes », « les exponentielles l'emportent aussi sur les logarithmes ».

- *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *posons* $x_n = \dfrac{(\ln(n))^5}{7^n}$. *Déterminons la limite de* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Encore une fois, on factorise au numérateur et au dénominateur par le terme « le plus gros ».

- *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *posons* $u_n = \cos\left(\dfrac{\pi\, 3^n - n^{1789}e^n + 1789!}{\cos(n!) + 3^{n+1}}\right)$. *Déterminons la limite de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

III Suites négligeables, suites équivalentes

Dans cette partie, nous anticipons légèrement le chapitre d'analyse asymptotique du second semestre. Nous allons déjà y présenter les notions de suites négligeables et de suites équivalentes (leurs définitions est très simple) ainsi que quelques unes de leurs propriétés. Toutefois nous garderons les exemples difficiles et les subtilités pour le second semestre.

On se donne des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont les termes sont tous non nuls à partir d'un certain rang.

1) Suites négligeables

a) Définition et interprétation

On oubliera souvent d'écrire « $n \to +\infty$ » quand on manipulera des suites car, comme pour les limites : pour les suites, c'est « forcément » (sauf quand il y a un paramètre mais dans ce cas tout sera précisé) quand n tend vers $+\infty$.

Définition. *On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On note alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ ou, plus simplement, $u_n = o(v_n)$, et on dit que u_n est un « petit o » de v_n.*

Exemples :

- *Si $0 < \alpha < \beta$, alors*

- *Autre écriture des croissances comparées vues dans le paragraphe précédent : pour tous α, γ strictement positifs et pour tout q tel que $|q| > 1$,*

$$(\ln(n))^\gamma = o(n^\alpha), \qquad n^\alpha = o(q^n), \qquad q^n = o(n!) \qquad \text{et} \qquad n! = o(n^n).$$

- *On a également, si α et γ sont strictement positifs et q est tel que $|q| < 1$:*

$$\frac{1}{n^n} = o\left(\frac{1}{n!}\right), \quad \frac{1}{n!} = o(q^n), \quad q^n = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \quad \text{et} \quad \frac{1}{n^\alpha} = o\left(\frac{1}{(\ln(n))^\gamma}\right).$$

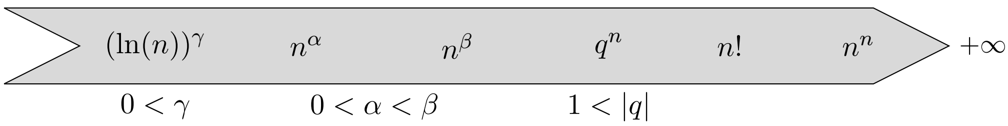
Cas particulier important :

Dire que $u_n = o(1)$ est donc une autre manière de dire que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Interprétation :

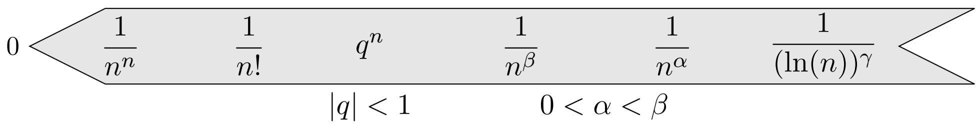
> Cette interprétation n'est pas rigoureuse ! Justement, la notation o permet de définir rigoureusement les notions écrites entre guillemets.

- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers $+\infty$, alors $u_n = \mathrm{o}(v_n)$ quand « $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ plus vite que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ». Par exemple (voir ci-dessus), $n = \mathrm{o}(n^2)$. Ci-dessous, parmi les suites usuelles, on range celles qui tendent vers $+\infty$ (en valeur absolue pour $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$) « de la plus lente à la plus rapide » (et donc, chaque suite est négligeable devant celles situées à sa droite) :



> Quand on parle de suites négligeables, les suites ne tendent pas forcément vers 0 ou $+\infty$ comme les exemples ci-contre pourraient le laisser penser.

- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers 0, alors $u_n = \mathrm{o}(v_n)$ quand « $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 plus vite que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ». Par exemple (voir ci-dessus), $\dfrac{1}{n^2} = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$. Ci-dessous, parmi les suites usuelles, on range celles qui tendent vers 0 « de la plus lente à la plus rapide » (et donc, chaque suite est négligeable devant celles situées à sa droite) :



Remarque : La notation o est appelée notation de Landau. Elle est très utilisée en mathématiques et très pratique (comme nous allons le voir).

Cependant elle repose sur un abus d'écriture : $\mathrm{o}(v_n)$ ne désigne pas une suite fixée mais n'importe quelle suite négligeable devant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En particulier, si $u_n = \mathrm{o}(v_n)$ et $w_n = \mathrm{o}(v_n)$, alors on a pas forcément $u_n = v_n$ (ni même pour n assez grand).

Par exemple $n = o(n^2)$ et $\sqrt{n} = o(n^2)$ alors que les suites $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ ne sont pas égales.

De plus on écrit $u_n = \mathrm{o}(v_n)$ et jamais $\mathrm{o}(v_n) = u_n$.

> On rencontrera aussi les notations $u_n = v_n + o(w_n)$ pour dire que $u_n = v_n + \varepsilon_n$ avec $\varepsilon_n = o(w_n)$. Cela revient encore à dire que $u_n - v_n = o(w_n)$

b) Premières propriétés

Proposition (transitivité). *Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n = o(w_n)$.*

Démonstration. $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\dfrac{v_n}{w_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\dfrac{u_n}{w_n} = \dfrac{u_n}{v_n} \times \dfrac{v_n}{w_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. □

Exemple :

> Dire que $u_n = \mathrm{o}(\ell)$, avec ℓ un réel non nul, est équivalent à dire que $u_n = \mathrm{o}(1)$ ou encore que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Proposition (multiplication par un réel non nul). *Si $u_n = o(v_n)$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$, alors $\lambda u_n = o(v_n)$ et $u_n = o(\lambda v_n)$.*

Démonstration. $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\dfrac{\lambda u_n}{v_n} = \lambda \times \dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\dfrac{u_n}{\lambda v_n} = \dfrac{1}{\lambda} \times \dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. □

Remarques :

- On n'écrit JAMAIS $u_n = \mathrm{o}(0)$: cela n'a aucun sens !

- En particulier, si $u_n = \mathrm{o}(v_n)$, alors $-u_n = \mathrm{o}(v_n)$ et $2u_n = \mathrm{o}(v_n)$. Avec les mains : « les constantes multiplicatives n'apparaissent pas dans les o ». En fait, elles sont superflues. Il ne serait pas faux d'écrire $2u_n = \mathrm{o}(2v_n)$, mais c'est inutile.
- Les o servent à comparer les ordres de grandeur de deux suites : par exemple, le cas échéant, il est plus parlant de dire que $2u_n$ est négligeable devant n que de dire que $2u_n$ est négligeable devant $2n$: on s'intéresse uniquement à l'ordre de grandeur.

Proposition (multiplication).
- *Si $u_n = o(v_n)$ alors $u_n \times w_n = o(v_n \times w_n)$.*
- *Si $u_n = o(v_n)$ et $w_n = o(x_n)$ alors $u_n \times w_n = o(v_n \times x_n)$.*

DÉMONSTRATION.
- $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\dfrac{u_n \times w_n}{v_n \times w_n} = \dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
- $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\dfrac{w_n}{x_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\dfrac{u_n w_n}{v_n x_n} = \dfrac{u_n}{v_n}\dfrac{w_n}{x_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. □

Exemples :

En d'autres termes, on peut « sommer les o ». Attention, cependant, il faut « les mêmes o » ! Nous aurons l'occasion de voir des contre-exemple et nous verrons au semestre comment contourner ce problème.

Proposition (somme de mêmes petits o). *Si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n + v_n = o(w_n)$.*

DÉMONSTRATION. $\dfrac{u_n}{w_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, $\dfrac{v_n}{w_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\dfrac{u_n+v_n}{w_n} = \dfrac{u_n}{w_n}+\dfrac{v_n}{w_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.□

Exemple :

Si $u_n = \mathrm{o}(w_n)$ et $v_n = \mathrm{o}(w_n)$, alors $u_n - v_n = \mathrm{o}(w_n)$, surtout pas 0 ! En effet $-v_n = \mathrm{o}(w_n)$ et donc $u_n - v_n = u_n + (-v_n) = \mathrm{o}(w_n)$.

Il existe une multitudes de propriétés sur les suites négligeables et il serait fastidieux d'être exhaustif et de toutes les retenir : au moindre doute, on refait la démonstration au brouillon. C'est souvent immédiat !

Résumons ces propriétés :

$$\boxed{\begin{gathered} o(o(u_n)) = o(u_n) \\ \lambda o(u_n) = o(\lambda u_n) = o(u_n) \text{ si } \lambda \neq 0 \\ v_n \times o(u_n) = o(v_n u_n) \\ o(u_n) \times o(v_n) = o(u_n v_n) \\ o(u_n) \pm o(u_n) = o(u_n) \\ o(u_n) \pm o(v_n) = ???? \end{gathered}}$$

2) Suites équivalentes

a) Définition et interprétation

On n'écrit jamais $u_n \sim 0$: cela n'a aucun sens !

Définition. *On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont équivalentes si $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. On notera $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ ou, plus simplement, $u_n \sim v_n$.*

Cette interprétation est peu rigoureuse ici aussi !

Interprétation : $u_n \sim v_n$ quand « $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont à peu près de la même taille ».

b) Équivalents usuels

C'est faux si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 ! Il ne faut donc pas oublier de le vérifier.

Proposition. *Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on a les équivalents suivants :*

- $\sin(u_n) \sim u_n$
- $\tan(u_n) \sim u_n$
- $\ln(1+u_n) \sim u_n$
- $e^{u_n} \sim 1$
- $e^{u_n} - 1 \sim u_n$
- $\cos(u_n) \sim 1$
- $(1+u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$ *avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$, fixe*
- $\cos(u_n) - 1 \sim \dfrac{-u_n^2}{2}$

Démonstration.
- $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\dfrac{\sin(u)}{u} \xrightarrow[u\to 0]{} 1$ (taux d'accroissement en 0) donc, par composition de limites, $\dfrac{\sin(u_n)}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ c'est-à-dire que $\sin(u_n) \sim u_n$. De même pour $\ln(u_n), \tan(u_n), \exp(u_n)$ et $(1+u_n)^\alpha - 1$
- L'équivalent de $\cos(u_n)$ est immédiat.
- On a $\cos(u_n)-1 = \cos\left(2\times\dfrac{u_n}{2}\right)-1 = \cos^2\left(\dfrac{u_n}{2}\right)-\sin^2\left(\dfrac{u_n}{2}\right)-1 = -2\sin^2\left(\dfrac{u_n}{2}\right)$. Ainsi
$$\frac{\cos(u_n)-1}{-u_n^2/2} = \frac{\sin^2(u_n/2)}{u_n^2/4} = \left(\frac{\sin(u_n/2)}{u_n/2}\right)^2.$$
Puisque $\dfrac{u_n}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\dfrac{\sin(u_n/2)}{u_n/2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, on a $\dfrac{\cos(u_n)-1}{-u_n^2/2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1^2 = 1$. □

Une suite polynomiale est équivalente à son terme de plus haut degré. Attention si c'est un polynôme en $\dfrac{1}{n}$, c'est équivalent au terme de plus bas degré.

Proposition. *Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $q < p$. Soient $a_q, \ldots, a_p$ des réels tels que $a_q \neq 0$ et $a_q \neq 0$. Alors*
$$\sum_{k=q}^{p} a_k n^k \sim a_p n^p \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=q}^{p} \frac{a_k}{n^k} \sim \frac{a_q}{n^q}.$$

Démonstration. Nous avons
$$\frac{1}{a_p n^p}\sum_{k=q}^{p} a_k n^k = \sum_{k=q}^{p-1} \frac{a_k}{a_p n^{p-k}} + 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$
et
$$\frac{n^q}{a_q}\sum_{k=q}^{p} \frac{a_k}{n^k} = 1 + \sum_{k=q+1}^{p} \frac{a_k}{a_q n^{k-q}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$
□

Exemples :

c) Propriétés

Là aussi, les propriétés de ce paragraphe sont toutes assez intuitives une fois que l'interprétation du paragraphe III.1.a.

Proposition.

- *Réflexivité :* $u_n \sim u_n$.
- *Symétrie : Si* $u_n \sim v_n$ *alors* $v_n \sim u_n$.
- *Transitivité : Si* $u_n \sim v_n$ *et* $v_n \sim w_n$ *alors* $u_n \sim w_n$.

Démonstration.
- On a $\dfrac{u_n}{u_n} = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
- Si $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, alors $\dfrac{v_n}{u_n} = \dfrac{1}{u_n/v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{1} = 1$.
- Si $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et $\dfrac{v_n}{w_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, alors $\dfrac{u_n}{w_n} = \dfrac{u_n}{v_n}\dfrac{v_n}{w_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. □

Proposition (produit). *Si* $u_n \sim v_n$ *et* $w_n \sim t_n$ *alors* $u_n \times w_n \sim v_n \times t_n$.

Démonstration. $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et $\dfrac{w_n}{t_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc $\dfrac{u_n w_n}{v_n t_n} = \dfrac{u_n}{v_n}\dfrac{w_n}{t_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. □

C'est normal ! Quand on parle de suites négligeables, on parle de limite nulle donc multiplier par un scalaire ne change rien, tandis que quand on parle de suites équivalentes, on parle de limite égale à 1, donc si on multiplie par une constante, on change la limite !

Remarque : En particulier, si $u_n \sim v_n$ et si $\lambda \in \mathbb{R}^*$, alors $\lambda u_n \sim \lambda v_n$. Contrairement aux o, les constantes multiplicatives « apparaissent » dans les équivalents.

Exemple :

Proposition (quotient). *Si* $u_n \sim v_n$ *et* $w_n \sim t_n$ *alors* $\dfrac{u_n}{w_n} \sim \dfrac{v_n}{t_n}$.

Démonstration. $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et $\dfrac{w_n}{t_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc $\dfrac{u_n/w_n}{v_n/t_n} = \dfrac{u_n/v_n}{w_n/t_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.□

Proposition (élévation à une puissance FIXE). *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}$ *tel que* u_n^α *et* v_n^α *sont bien définis pour* n *assez grand. Si* $u_n \sim v_n$ *alors* $u_n^\alpha \sim {v_n}^\alpha$.

Démonstration. Par hypothèse, $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ est continue donc $(u_n/v_n)^\alpha \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1^\alpha = 1$ ce qui permet de conclure. □

Il existe une multitudes de propriétés sur les suites équivalentes et il serait fastidieux d'être exhaustif et de toutes les retenir : au moindre doute, on refait la démonstration au brouillon. C'est souvent immédiat et nous en verrons d'autres au second semestre.

⚠ De nombreuses opérations sur les équivalents sont illicites :
- On ne peut pas sommer des équivalents !
- On ne peut pas composer des équivalents par une fonction (même continue !) en général (à part pour les puissances fixes, comme on l'a vu).
- On ne peut pas passer à une puissance variable !

Nous aurons l'occasion de rencontrer des contre-exemples et nous verrons au second semestre comment contourner ces restrictions.

d) Conséquence : limite de fractions rationnelles

On peut se contenter de retenir que « seul compte le terme dominant » En particulier cette suite dont le terme général est une fraction rationnelle a la même limite que la suite de terme général $\frac{a_p n^p}{b_q n^q} = \frac{a_p}{b_q} n^{p-q}$.

Proposition. *Soient $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $(a_0, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^p$ et $(b_0, \dots, b_q) \in \mathbb{R}^q$. Supposons que $a_p \neq 0$ et $b_q \neq 0$. On a*

$$\frac{a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \cdots + a_1 n + a_0}{b_q n^q + b_{q-1} n^{q-1} + \cdots + b_1 n + b_0} \sim \frac{a_p n^p}{b_q n^q} = \frac{a_p}{b_q} n^{p-q}.$$

Démonstration. Le numérateur est équivalent à $a_p n^p$ et le dénominateur à $a_q n^q$. Il suffit donc d'appliquer la propriété de passage au quotient dans les équivalents. □

e) Lien avec les limites

Théorème. *Si $u_n \sim v_n$ et si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ alors $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$.*

Démonstration. Il suffit de voir que, pour n assez grand, u_n est non nul par hypothèse donc $v_n = u_n \times \frac{v_n}{u_n}$ et que $\frac{v_n}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. □

En d'autres termes, deux suites équivalentes ont même limite éventuelle. Attention, comme dit ci-contre, la réciproque est fausse.

⚠ La réciproque est fausse ! Deux suites ayant même limite ne sont pas forcément équivalentes !

Par exemple :

- $n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, $n^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ *mais les suites de terme général n et n^2 ne sont pas équivalentes (le quotient ne tend pas vers 1).*
- $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, $\frac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ *mais les suites de terme général $\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n^2}$ ne sont pas équivalentes.*

Cependant, on a le résultat suivant :

Proposition. *Soit $L \in \mathbb{R}^*$. Alors $u_n \sim L$ si et seulement si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$.*

Démonstration. $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L \iff \frac{u_n}{L} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \iff u_n \sim L$. □

⚠ C'est une erreur classique : ce n'est pas une raison pour la faire !

⚠ Attention, on rappelle qu'on ne manipule que des suites non nulles à partir d'un certain rang. Par conséquent, cela n'a AUCUN SENS de dire qu'une suite est équivalente à 0 ou à la suite nulle. Par exemple, même s'il est correct d'écrire que $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on n'écrira JAMAIS $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim 0$ mais plutôt $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$ (cf. paragraphe III.2.b).

⚠ Comme on l'a vu ci-dessus, c'est faux si $L = 0$ ou si $L = \pm\infty$: en poussant un peu, on pourrait dire que c'est faux dans tous les cas intéressants...

Corollaire. *Soit $L \in \mathbb{R}^*$. Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$ alors $u_n \sim v_n$.*

Exemple : $2 + \frac{1}{n} \sim 2 - \frac{1}{n} \sim 2$.

IV Limites et suites monotones

1) Théorème de convergence monotone

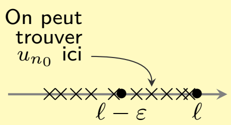
Théorème (de la limite monotone – cas croissant). *Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.*

1. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, alors elle est convergente et sa limite est $\sup_{n\in\mathbb{N}} u_n$.*
2. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée, alors elle diverge vers $+\infty$.*

$\sup_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est la borne supérieure de l'ensemble

$$\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Démonstration.



$\square$

En d'autres termes, une suite croissante converge si et seulement si elle est majorée. En tout cas, elle est minorée par son premier terme.

De manière analogue :

Théorème (de la limite monotone – cas décroissant). *Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.*

1. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée, alors elle est convergente et sa limite est $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$.*
2. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas minorée, alors elle tend vers $-\infty$.*

$\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est la borne inférieure de l'ensemble

$$\{\, u_n \,|\, n \in \mathbb{N} \,\}.$$

Corollaire. *Toute suite réelle monotone admet une limite (finie ou infinie).*

En aucun cas on ne conclut que $\ell = M$ car M est un majorant de la suite, mais pas forcément sa borne supérieure.

Remarques :

- Le théorème de convergence monotone nous donne des informations sur la limite, en cas de convergence :
  - Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (respectivement strictement croissante) et majorée par un réel M, alors sa limite appartient à $[u_0\,;M]$ (respectivement à $]u_0\,;M]$).
  - Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (respectivement strictement décroissante) et minorée par un réel m, alors sa limite appartient à $[m\,;u_0]$ (respectivement à $[m\,;u_0[$).
- Le théorème de convergence monotone nous assure aussi que, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (respectivement décroissante) et converge vers un réel ℓ, alors elle est majorée (respectivement minorée) par ℓ. De plus ℓ est la borne supérieure (respectivement inférieure) de la partie $A = \{u_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$. Si la monotonie est stricte, alors A n'admet pas de maximum (respectivement de minimum).

On ne conclut surtout pas que $\ell = m$ car m est un minorant de la suite, mais pas forcément sa borne inférieure. Par exemple, la suite $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ est décroissante minorée par 0 mais converge vers 1.

Exemple : *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.*

Deux erreurs graves et classiques à éviter :

- Dire que $u_n \leqslant 2 - \frac{1}{n}$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée. Un majorant ne peux PAS dépendre de n. C'est un réel fixe.
- Conclure que, comme la suite est croissante majorée par 2, elle converge vers 2. Non, on sait juste que 2 est un majorant mais pas forcément la borne supérieure.

2) Suites adjacentes

Définition. *Deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dites adjacentes si l'une est croissante, l'autre décroissante et si $v_n - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.*

Pour montrer que deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, on doit montrer que $v_n - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On ne dit surtout pas que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ donc $v_n - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell - \ell = 0$. On ne sait pas (encore) que les suites admettent une même limite : ce point est justement la raison d'être des suites adjacentes.

Proposition. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, alors elles convergent et ont la même limite ℓ. De plus (dans le cas où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante), on a :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall p \in \mathbb{N}, \qquad u_0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \ell \leqslant v_{p+1} \leqslant v_p \leqslant v_0.$$

Démonstration.

□

Sinon il existerait $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} = \ell$ ou $v_{n_0} = \ell$ et cela contredirait la stricte monotonie des suites.

Remarque : Si les suites sont strictement monotones, alors on a même

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall p \in \mathbb{N} \qquad u_0 < u_n < u_{n+1} < \ell < v_{p+1} < v_p < v_0.$$

Les suites adjacentes sont notamment utilisées dans les algorithmes de dichotomie. Nous en verrons plusieurs exemples dans le chapitre 14.

Exemple : *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}$. Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. En effet :*

3) Application à l'étude des suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$

a) Introduction

Soit $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ avec D_f une partie non vide de $\mathbb{R}$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = f(u_n)$$

(sous réserve que $u_n \in D_f$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).

Si f est une fonction affine, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique et on sait expliciter la suite et étudier sa nature. Dans les autres cas, conformément au programme, l'étude de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sera systématiquement guidée et aucun résultat sur les suites récurrentes n'est exigible. Néanmoins leur étude est classique et on en rencontre souvent à l'écrit.

Définition. *Soit I un intervalle non vide inclus dans D_f.*

- *On dit que $x_0 \in I$ est un point fixe de f sur I si $f(x_0) = x_0$.*
- *On dit que I est stable par f si $f(I) \subset I$ c'est-à-dire, pour tout $x \in I$, $f(x) \in I$.*

Voici les grandes lignes de l'étude de ce type de suites :

- On étudie les variations de la fonction f sur D_f ainsi que le signe de $g : x \longmapsto f(x) - x$ sur D_f. Les points fixes (s'il y en a) de f sont alors les points en lesquels g s'annule.
- On se place sur un intervalle I inclus dans D_f et stable par la fonction f (et généralement tel que f est monotone sur I).

- On suppose que $u_0 \in I$. Comme I est stable par f, on a $u_1 = f(u_0) \in I$, puis $u_2 = f(u_1) \in I$, etc. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$.
- On déduit du signe de g sur I, la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puisque

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n).$$

- On montre que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée (respectivement minorée) ou non et, si on a montré qu'elle est croissante (respectivement décroissante) alors, d'après le théorème de convergence monotone, elle admet une limite (finie ou infinie selon les cas).
- Supposons que f est continue sur I et que l'on ait montré que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $\ell \in I$.

Ce point précisément est particulièrement classique et important. Il assure que, si f est continue et si la suite admet une limite, cette limite est un point fixe de f. Il faut reproduite entièrement et intégralement cette preuve sur sa copie.

⚠ Ce n'est qu'une condition nécessaire : la fonction peut admettre un point fixe sans que la limite soit finie ni même qu'elle existe. Il est bon cependant de connaître ce résultat : d'une part, il permet de deviner les limites **éventuelles** : ce sont les points fixes (mais, encore une fois, ce n'est qu'une condition nécessaire). D'autre part, il est utile dans certains raisonnements par l'absurde. En effet, par exemple, si f n'a pas de point fixe, on peut en déduire directement que la suite diverge ! Voir un exemple de tel raisonnement par l'absurde à la question 6.c ci-dessous.

Dans le chapitre 15, on ne supposera plus f monotone, on aura alors un outil puissant, l'inégalité des accroissements finis, permettant de se passer de l'hypothèse de monotonie dans certains cas.

b) Un exemple dans le cas où f est croissante

Considérons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{2} + \dfrac{4}{7}u_n$. On considère $f : x \longmapsto \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{4}{7}x$ de telle sorte que $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Question 1. Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et étudier ses variations.

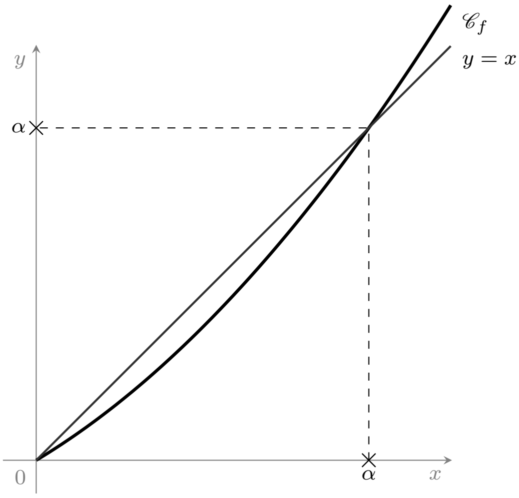
Question 2. Déterminer le signe de $g : x \longmapsto f(x) - x$ sur $\mathbb{R}_+$ et montrer que f admet deux points fixes α et α' sur $\mathbb{R}_+$ vérifiant $\alpha' < \alpha$.

Dans cet exemple, on peut remplacer $1/2$ par $a > 0$ et $4/7$ par $b \in \,]0\,;1[$ et tout reste valable avec $\alpha = \dfrac{1-b}{a}$.

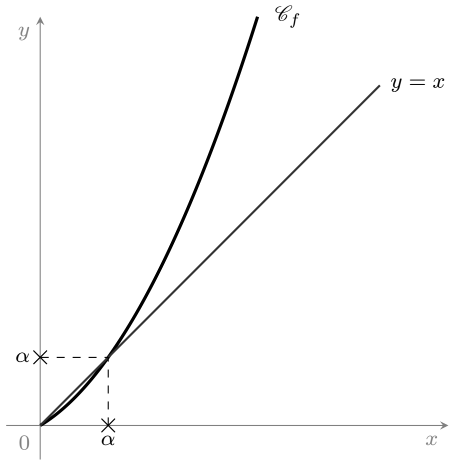
Question 3. Conjecturer graphiquement les variations et la nature de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ selon que $u_0 < \alpha$ ou $u_0 > \alpha$.

On. trace (en gris) les premiers termes de la suite selon que $u_0 < \alpha$ ou $u_0 > \alpha$.

Pour tracer cela, on démarre en u_0 sur l'axe des abscisses, puis on se dirige verticalement vers la courbe, puis horizontalement vers la bissectrice, puis verticalement vers la courbe, puis horizontalement vers la bissectrice, puis verticalement vers la courbe, puis horizontalement vers la bissectrice, etc.



Cas où $u_0 < \alpha$.



Cas où $u_0 > \alpha$.

On conjecture que, si $u_0 < \alpha$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et tend vers 0. On conjecture que, si $u_0 > \alpha$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et tend vers $+\infty$.

Question 4. Que dire de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***lorsque*** u_0 ***est un point fixe ?***

Lorsque la fonction de récurrence f est croissante sur I (comme ici avec $I = \mathbb{R}_+$), alors on peut montrer que la suite est toujours monotone. Plus précisément, elle est croissante (respectivement constante, décroissante) si $u_1 > u_0$ (respectivement $u_1 = u_0, u_1 < u_0$).

Question 5. Supposons que $u_0 \in]0\,;\alpha[$***.***

a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0\,;\alpha[$***.***

b. Déterminer les variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$***.***

c. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***converge vers une limite que l'on précisera.***

Question 6. Supposons que $u_0 > \alpha$***.***

a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > \alpha$***.***

b. Déterminer les variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

c. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée.

Ici c'est un raisonnement très classique : si on sait qu'une suite est croissante et on demande de montrer qu'elle n'est pas majorée, on raisonne par l'absurde en supposant qu'elle l'est. Le théorème de la limite monotone entraîne alors qu'elle converge vers une limite finie. On essaye alors d'aboutir à une contradiction comme ici. Même chose pour décroissante non minorée.

d. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite que l'on précisera.

c) Un exemple dans le cas où f est décroissante

Considérons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 + \dfrac{2}{u_n}$. On considère $f : x \longmapsto 1 + \dfrac{2}{x}$ de telle sorte que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Question 1. Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et étudier ses variations.
La fonction f est définie, continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ car la fonction inverse l'est.

Question 2. Déterminer le signe de $g : x \longmapsto f \circ f(x) - x$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que $f \circ f$ admet un unique point fixe α sur $\mathbb{R}_+^*$ et vérifier que $f(\alpha) = \alpha$.

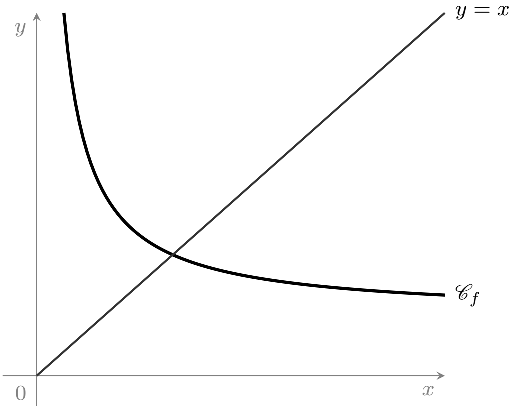
Lorsque la fonction de récurrence f est décroissante sur I (comme ici avec $I = \mathbb{R}_+^*$) et que I est stable par f, alors $f \circ f$ est croissante. On peut montrer que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont toujours monotones, de monotonie contraire. Plus précisément $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (resp. constante, décroissante) si $u_2 > u_0$ (resp. $u_2 = u_0$, $u_2 < u_0$). Si l'une des suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge. Si $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ admettent des limites $\ell \in I$ et $\ell' \in I$ respectivement, et si $f \circ f$ est continue sur I, alors on montre de même que ℓ et ℓ' sont des points fixes de $f \circ f$. On a $\ell = \ell'$ si et seulement si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (vers ℓ).

Question 3. Montrer que $u_1 > 1$ ***et que, pour tout*** $n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$***,*** u_n ***est bien défini et*** $1 < u_n < 3$***.***
Puisque $u_0 > 0$, on a $\dfrac{2}{u_0} > 0$ et donc $u_1 = 1 + \dfrac{2}{u_0} > 1$. Procédons ensuite par récurrence.

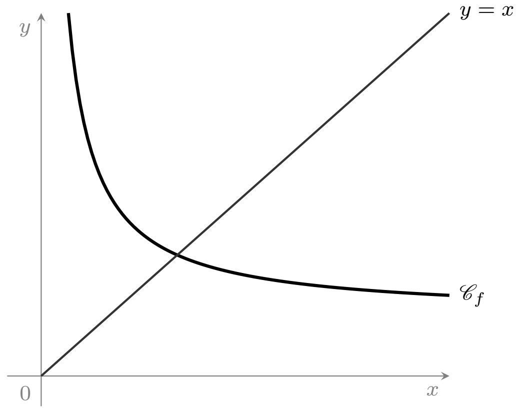
- On a $u_1 > 1$ donc $u_2 = f(u_1)$ est bien défini et $0 < \dfrac{1}{u_1} < 1$. Ainsi $1 < 1 + \dfrac{2}{u_1} < 1 + 2 = 3$, i.e. $1 < u_2 < 3$.
- Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$. Supposons que la propriété est vraie au rang n, c'est-à-dire $1 < u_n < 3$.
  On en déduit que $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien défini, que $0 < \dfrac{1}{u_n} < 1$ donc $0 < \dfrac{2}{u_n} < 2$, donc $1 < u_{n+1} < 3$. La propriété est donc vraie au rang $n+1$. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$, u_n est bien défini et $1 < u_n < 3$.

Question 4. Conjecturer graphiquement les variations et la nature de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***selon que*** $u_0 < \alpha$ ***ou*** $u_0 > \alpha$***.***

On trace (en gris) les premiers termes de la suite selon que $u_0 < \alpha$ ou $u_0 > \alpha$.



Cas où $u_0 < \alpha$.



Cas où $u_0 > \alpha$.

On conjecture que, si $u_0 < \alpha$, alors $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante. On conjecture que, si $u_0 > \alpha$, alors $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante. Dans tous les cas, on conjecture que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

Question 5. Que dire de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***lorsque*** $u_0 = \alpha$ ***?***
Si $u_0 = \alpha$, alors $u_1 = f(u_0) = f(\alpha) = \alpha$, $u_2 = f(u_1) = f(\alpha) = \alpha$, etc. Par récurrence immédiate, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \alpha$.

Question 6. Supposons que $u_0 < \alpha$***.***

a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$***,*** $u_{2n} < \alpha$***.***

b. En déduire que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ ***est strictement croissante puis que la suite*** $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ ***est strictement décroissante.***

Si f est décroissante sur un intervalle I, alors il est faux en général que $f \circ f$ est croissante sur I. Par exemple la fonction $f : x \longmapsto 1 - x^2$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ mais $f \circ f : x \longmapsto x^2(2-x^2)$ n'est pas croissante sur $\mathbb{R}_+$. Si on ajoute l'argument que I est stable par f, alors on peut cette fois conclure que f est croissante sur I.

***On montrerait de même (on ne demande pas de le faire) que, si $u_0 > \alpha$, alors $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.*.**

Question 7. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite que l'on précisera.

V Utilisation de Python

Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = F(u_n, n)$ avec F une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que l'on a implémenté F au préalable en Python.

1) Calcul d'une valeur approchée de la limite

Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ alors, lorsque n est grand, u_n une approximation de ℓ (cf. chapitre précédent pour l'implémentation de u_n.). Généralement on s'est donné $\varepsilon > 0$ petit et on a déterminé au préalable un entier n afin que $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$Par exemple à l'aide de l'inégalité des accroissements finis, cf. chapitre 14..

2) Calculer le plus petit rang pour lequel la suite vérifie une condition

Il est classique de chercher à calculer le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir une approximation de la limite (la connaissant) d'une suite convergente avec une précision donnée. Si on connait la limite de la suite et qu'on la stocke dans une variable `lim`, alors le script suivant calcule le plus petit rang `n` tel que $|u_{\mathtt{n}} - \mathtt{lim}| \leqslant \mathtt{eps}$:

```
u=x; n=0
while abs(u-lim)>eps:
    u=F(u,n)
    n=n+1
```

Si on sait que la suite tend vers $+\infty$, alors le script suivant calcule le plus petit rang `n` tel que $u_{\mathtt{n}} \geqslant \mathtt{A}$, pour `A` un réel :

```
u=x; n=0
while u<A:
    u=F(u,n)
    n=n+1
```

***Exemple :** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. La suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$.*

Écrivons une fonction en Python qui prend $A > 0$ en entrée et qui détermine le plus petit rang $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel $H_n \geqslant A$ (ce rang existe puisque la suite tend vers $+\infty$).

La suite semble converger très lentement vers $+\infty$. C'est normal, on montrera dans le chapitre 15 que $\frac{H_n}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Elle converge aussi lentement vers $+\infty$ que $(\ln(n))_{n\geqslant 1}$.

```
def Rang(A):
    H=1; n=1
    while H<A:
        H=H+1/(n+1)
        n=n+1
    return n
```

L'exécution de `Rang(10)` *renvoie* 12367, *l'exécution de* `Rang(15)` *renvoie* 1835421 et *l'exécution de* `Rang(20)` *renvoie* 272400600.

3) Représentation des termes d'une suite

Nous avons vu dans le chapitre précédent comment représenter graphiquement une suite. On peut alors conjecturer l'existence d'une éventuelle limite et sa valeur.

Exemples :

- *Si on reprend les deux courbes tracées à la fin du paragraphe III.4 du chapitre précédent, on observe que la première semble converge vers 0 (ce qui est cohérent avec les résultats du paragraphe IV.3.b) et la deuxième semble converger vers 2 (ce qui est cohérent avec les résultats du paragraphe IV.3.c). Pour simplifier la lecture, on aurait pu ajouter la commande* `plt.plot([0,15],[2,2],'r')` *juste avant* `plt.show()`, *pour superposer la courbe de la fonction constante égale à 2.*
- *Soit $x \in \mathbb{R}$. Reprenons l'exemple de $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$, $n \in \mathbb{N}$. Nous verrons dans le chapitre 22 que $S_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^x$. Le script ci-dessous crée une fonction qui prend en entrée x et qui représente graphiquement les $n+1$ premières valeurs de la suite $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ et lui superpose la droite d'ordonnée e^x pour obtenir ce graphique.*

Ci-dessous, on a exécuté `S(10,-1)`. On constate bien que $(S_n(-1))_{n\in\mathbb{N}}$ semble converger vers e^{-1}. En essayant avec d'autres valeurs de x, on constate que $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ semble converger vers e^x.