Chapitre 7

Suites réelles

I Notion de suite de nombres réels

1) Définitions

Autrement dit une suite u est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ mais, au lieu de la noter

$$u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & u(n) \end{array} \right.$$

on la note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

Définition. *Une suite réelle (ou suite de réels ou suite numérique) u est la donnée pour chaque entier naturel $n \in \mathbb{N}$ d'un réel, appelé terme général de rang n (ou d'indice n) de la suite et noté u_n. La suite u se note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_{n\geqslant 0}$.*

Définition. *On note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles.*

Il arrive qu'une suite ne soit pas définie pour les premières valeurs de $\mathbb{N}$.

Définition. *Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. On appelle aussi suite de nombres réels la donnée de u_n pour chaque $n \geqslant n_0$. On la note alors $(u_n)_{n\geqslant n_0}$. On dit que la suite est définie à partir du rang n_0. Le terme u_{n_0} s'appelle le terme initial de la suite.*

Ne pas confondre la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et son terme général u_n, ni avec l'ensemble $\{u_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ des valeurs de la suite. Il y a un nombre infini d'indices, mais l'ensemble des valeurs peut être fini. Par exemple,

$$\{(-1)^n \,|\, n \in \mathbb{N}\} = \{-1; 1\}.$$

On peut définir une suite de différentes manières :

1. **Suites définies explicitement.** On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie explicitement lorsque l'on donne, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression du terme u_n en fonction de son rang n.

   Par exemple, on définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

   $$u_n = 5(-2)^n, \quad v_n = \frac{1}{n^2+1}\sin\left(\frac{n\pi}{12}\right), \quad w_n = \left\{ \begin{array}{lll} 0 & \textit{si} & n \textit{ est impair}, \\ \dfrac{1}{\sqrt{3^n}} & \textit{si} & n \textit{ est pair}. \end{array} \right.$$

2. **Suites définies par récurrence.** On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par récurrence lorsque l'on donne
   - $p \in \mathbb{N}^*$ et les valeurs de $u_0, \ldots, u_{p-1}$,
   - pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de u_{n+p} en fonction des p termes précédents : $u_n, u_{n+1}, \ldots, u_{n+p-1}$.

   On dit alors que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une relation de récurrence d'ordre p.

   Par exemple, on définit les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence en posant :

   $$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = 5a_n + n + 2, \end{array} \right. \quad \textit{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} b_0 = 2,\ b_1 = 3,\ b_2 = -1, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ b_{n+3} = -3b_{n+1} + 4b_n. \end{array} \right.$$

   La suite de Syracuse est la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence par $s_0 \in \mathbb{N}^*$ et :

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad s_{n+1} = \left\{ \begin{array}{lll} 3s_n + 1 & \textit{si} & s_n \textit{ est impair}, \\ \dfrac{s_n}{2} & \textit{si} & s_n \textit{ est pair}. \end{array} \right.$$

La lettre n dans $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est muette : on peut la remplacer par ce qu'on veut (pas u bien sûr) et on ne doit pas l'introduire :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_k)_{k\in\mathbb{N}} = (u_p)_{p\in\mathbb{N}} = \cdots$$

En revanche, dans u_n, n n'est pas muette mais désigne un entier bien particulier, introduit préalablement.

3. **Suites définies implicitement.** On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie implicitement lorsque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit u_n comme l'unique solution d'une certaine équation.

   Par exemple, on définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n la plus grande solution de $x^{n+2} + x^{n+1} + x = 1$.

On peut dire aussi que $P(n)$ est vraie pour (tout) n assez grand.

Définition. *Soit P une propriété portant sur les entiers naturels. Supposons qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $P(n)$ est vraie. On dit alors que la propriété P est vraie à partir d'un certain rang.*

Définition. *On dit qu'une suite vérifie une propriété donnée à partir d'un certain rang lorsqu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ satisfait la propriété.*

On peut dire aussi $n^2 - 100 \geqslant 0$ pour n assez grand.

Exemple : *La suite $(n^2 - 100)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes positifs à partir d'un certain rang (du rang $n = 10$ pour être précis).*

2) Opérations sur les suites

Définition. *Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On désigne par*

- *$|u|$ la suite w définie par :* $\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = |u_n|$.
- *$u + v$ la suite w définie par :* $\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = u_n + v_n$.
- *αu la suite w définie par :* $\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \alpha u_n$.
- *uv la suite w définie par :* $\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = u_n v_n$.

Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \neq 0$, on désigne par

- *$\dfrac{1}{v}$ la suite w définie par :* $\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \dfrac{1}{v_n}$.
- *$\dfrac{u}{v}$ la suite w définie par :* $\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \dfrac{u_n}{v_n}$.

3) Propriétés générales

Étudier les variations d'une suite signifie étudier si elle est croissante, décroissante, strictement croissante ou strictement décroissante.

Définition (monotonie). *Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ réelle est dite.*

- *constante si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n$,*
- *stationnaire si elle est constante à partir d'un certain rang (c'est-à-dire il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_{n+1} = u_n$),*
- *croissante si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$,*
- *décroissante si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant u_{n+1}$,*
- *strictement croissante si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < u_{n+1}$,*
- *strictement décroissante si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > u_{n+1}$,*
- *monotone si elle est croissante ou décroissante, strictement monotone si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.*

Le critère avec le quotient est utile quand on manipule des factorielles, des puissances, des produits : toute quantité qui se simplifie bien quand on fait des quotients. Attention : il n'est valable qu'avec des suites strictement positives.

Pour déterminer les variations d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ réelle, on peut :

- étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (le plus sûr),
- comparer 1 avec $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, lorsque tous les termes de la suite sont **strictement positifs** (la suite est croissante si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$, et de même dans les autres cas),

- étudier le sens de variation de f, lorsque la suite est donnée explicitement sous la forme $u_n = f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (avec f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$).

Par exemple, la suite de terme général $u_n = \sqrt{n}e^{-n}$ (définie pour $n \geqslant 1$) est décroissante car la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}e^{-x}$ est décroissante sur $[1\,;+\infty[$ (car dérivable de dérivée négative). Attention : on ne dérive pas une suite, on ne peut pas dériver u_n, il faut revenir à une fonction f. De plus, ce n'est pas valable pour les suites vérifiant une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$! On peut avoir f croissante et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante ! Cela ne marche que quand on a $u_n = f(n)$.

Exemple : *Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 + 7u_n + 5$. Étudions ses variations : pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$u_{n+1} - u_n = u_n^2 + 7u_n + 5 - u_n = u_n^2 + 6u_n + 5.$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \geqslant 0$. En effet, raisonnons par récurrence : nous avons $u_0 = 1$ donc la propriété est vraie au rang 0. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons qu'elle soit vraie au rang n. Nous avons alors $u_{n+1} = u_n^2 + 7u_n + 5 \geqslant 0$ par somme. La propriété est donc vraie au rang $n+1$. D'où le résultat par récurrence.

Nous avons enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = u_n^2 + 6u_n + 5 \geqslant 0$. Ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Par récurrence immédiate, on obtient :

Proposition. *Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :*

- *constante si et seulement si il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = a$.*
- *croissante (respectivement décroissante) si et seulement si, pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n \leqslant p$, $u_n \leqslant u_p$ (respectivement $u_n \geqslant u_p$).*
- *strictement croissante (respectivement décroissante) si et seulement si, pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n < p$, $u_n < u_p$ (respectivement $u_n > u_p$).*

Définition. *Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite*

- *majorée si il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant M$.*
- *minorée si il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant m$.*
- *bornée si elle est à la fois majorée et minorée.*

Remarque : Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée (respectivement minorée, bornée) si et seulement si la partie $A = \{u_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ est majorée (respectivement minorée, bornée). Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

Exemple : *La suite $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée par 1. La suite $(n^2+1)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 1 mais n'est pas majorée.*

II Exemples usuels

1) Suites avec relation de récurrence additive ou multiplicative

Les résultats de ce paragraphe ne sont pas à connaître par cœur mais il faut savoir les retrouver.

a) Le cas additif

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle (définie explicitement si possible). On s'intéresse à une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = u_n + a_n.$$

Une erreur grave est de penser qu'il s'agit d'une suite arithmétique de raison a_n (cf. paragraphe 2 du II) et de conclure que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = u_0 + na_n.$$

C'est une erreur grave ! La raison d'une suite arithmétique est constante... ce qui n'est pas le cas de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a priori.

Ce type de suite est très classique et il faut savoir donner son terme général. Il y a plusieurs méthodes :

Plus généralement, pour tout $n \geqslant n_0$,

$$u_n = u_{n_0} + \sum_{k=n_0}^{n-1} a_k.$$

Par exemple supposons que $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 3^n$. Alors

b) Le cas multiplicatif

Une erreur grave est de penser qu'il s'agit d'une suite géométrique de raison a_n (cf. paragraphe 3 du II) et de conclure que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = u_0\, a_n^n.$$

C'est une erreur grave ! La raison d'une suite géométrique est constante... ce qui n'est pas le cas de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a priori.

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle (définie explicitement si possible). On s'intéresse à une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = u_n a_n.$$

Ce type de suite est très classique et il faut savoir donner son terme général. Il y a plusieurs méthodes :

Plus généralement, pour tout $n \geqslant n_0$,

$$u_n = u_{n_0} \prod_{k=n_0}^{n-1} a_k.$$

⚠ Cette manipulation n'est possible que tant que les termes de la suite sont non nuls. Si $u_0 \neq 0$ et si $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors, par récurrence immédiate, les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont non nuls.

Par exemple supposons que $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = (2n+1)u_n$. Alors

C'est le classique produit des impairs de 1 à $2n-1$. On multiplie (et donc divise) par le produit des entiers pairs de 2 à $2n$ (qui vaut $2^n n!$) pour obtenir $(2n)!$ au numérateur.

2) Suites arithmétiques

Définition. *Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite arithmétique si il existe un réel r tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$. Le réel r est appelé la raison de la suite et u_0 le terme initial.*

Il découle du paragraphe 1a (en prenant $a_n = r$ pour tout $n \in \mathbb{N}$) que :

Proposition. *Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison r si et seulement si :*

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = u_0 + rn.$$

Si la suite commence au rang n_0, on a

$$u_n = u_{n_0} + r(n - n_0)$$

pour tout $n \geqslant n_0$.

Proposition. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$.*

1. *Monotonie :*
   - *Si $r > 0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.*
   - *Si $r = 0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.*
   - *Si $r < 0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.*
2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)\left(u_0 + \frac{rn}{2}\right) = \frac{(n+1)(u_0+u_n)}{2}$.*

Cette somme est non exigible, mais il faut pouvoir la retrouver facilement avec la linéarité de la somme.

DÉMONSTRATION. Le premier point est laissé en exercice. Montrons le deuxième point : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_0 + r\sum_{k=0}^{n} k = (n+1)u_0 + r\frac{n(n+1)}{2} = (n+1)\left(u_0 + \frac{rn}{2}\right).$$

□

3) Suites géométriques

Si la suite commence au rang n_0, on a

$$u_n = u_{n_0} q^{n-n_0}$$

pour tout $n \geqslant n_0$.

Définition. *Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite géométrique si il existe un réel q tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = qu_n$. Le réel q est appelé la raison de la suite et u_0 le terme initial.*

Il découle du paragraphe 1a (en prenant $a_n = q$ pour tout $n \in \mathbb{N}$) que :

Proposition. *Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison q si et seulement si :*

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = u_0 q^n.$$

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes tous non nuls, elle est géométrique si et seulement si la suite $(u_{n+1}/u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. Un moyen simple de prouver qu'une suite n'est pas géométrique est d'exhiber deux entiers n_0 et n_1 (en général 0 et 1) tels que $\dfrac{u_{n_0+1}}{u_{n_0}} \neq \dfrac{u_{n_1+1}}{u_{n_1}}$.

Proposition. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}^*$.*

1. *Monotonie :*
   - *Si $q > 1$ et $u_0 > 0$ (respectivement $u_0 < 0$), alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante (respectivement décroissante).*
   - *Si $q = 1$ ou $u_0 = 0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.*
   - *Si $q \in]0\,;1[$ et $u_0 > 0$ (respectivement $u_0 < 0$), alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante (respectivement croissante).*
   - *Si $u_0 \neq 0$ et $q \in \mathbb{R}_-^*$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas monotone.*
2. *Si $q \neq 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{u_0 - u_{n+1}}{1-q}$.*

⇝ EXERCICE.

4) Suites arithmético-géométriques

Si $a = 1$, alors il s'agit d'une suite arithmétique de raison b. Si $b = 0$, alors il s'agit d'une suite géométrique de raison a.

Définition. *Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite arithmético-géométrique si il existe deux réels a et b tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$.*

Nous en déduisons la proposition suivante :

Il n'est pas indispensable de connaître cette proposition par cœur : il faut absolument savoir la redémontrer dans un cas particulier. L'idée essentielle derrière la preuve est de déterminer un point fixe de la fonction de récurrence (c'est-à-dire la solution de $x = ax + b$).

Proposition. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle qu'il existe deux réels a et b avec $a \neq 1$ vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$. Alors*

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = a^n \left(u_0 + \frac{b}{a-1}\right) - \frac{b}{a-1}.$$

Exemple :

5) Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

Définition. *Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ réelle est dite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants si il existe deux réels a et b tels que $b \neq 0$ et*

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

On dit que $r^2 = ar + b$ est l'équation caractéristique de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Si $b = 0$, alors $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison a. Ainsi, pour tout $n \geqslant 1$, on a $u_n = a^{n-1}u_1$.

a et b ne dépendent pas de n ! On dit donc parfois qu'une telle suite est récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants, mais nous ne rencontrerons que des suites de ce type, donc nous ne ferons pas la distinction dans la suite.

Exemples :

- *La suite de Fibonacci définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

- *Cependant, une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant une relation de récurrence du type :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+2} = n \times u_{n+1} - n^2 \times u_n$$

n'est pas une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.

Attention à l'ordre des quantificateurs : c'est

$$\exists!(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}$$

et non

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists!(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$$

(λ et μ ne peuvent pas dépendre de n).

Théorème. *L'équation caractéristique est équivalente à (E) : $r^2 - ar - b = 0$. Elle est polynomiale du second degré et son discriminant est $\Delta = a^2 + 4b$.*

- *Si $\Delta > 0$, alors (E) admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 et il existe deux réels λ et μ uniques tels que*

- *Si $\Delta = 0$, alors (E) admet une racine double réelle $r_0 = a/2$ et il existe deux réels λ et μ uniques tels que*

DÉMONSTRATION. Nous pourrions le montrer par récurrence. Nous verrons une autre preuve plus élégante dans le chapitre 26. □

Le cas où $\Delta < 0$ est hors-programme. Il utilise des nombres complexes.

Remarque : On détermine λ et μ à l'aide de u_0 et u_1.

Exemples :

- *(Suite de Fibonacci) Calculons le terme général de la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.*

- *Calculons le terme général de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 = 1$, $x_1 = -2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4x_{n+2} = 4x_{n+1} - x_n$.*

III Utilisation de Python

L'outil informatique est précieux pour calculer des approximations des termes successifs d'une suite définie par récurrence lorsqu'on ne peut pas trouver une formule générale explicite. Il permet aussi de représenter graphiquement l'évolution d'une suite et de conjecturer éventuellement sa nature et la valeur de sa limite (si elle existe, cf. chapitre 8).
L'idée générale est d'écrire un programme avec une variable `u` initialisée en le premier terme de la suite. On fait ensuite une boucle `for` (si on veut calculer le terme d'un certain rang donné) ou une boucle `while` (si on veut calculer un terme vérifiant une certaine condition) telle que, à chaque étape, on transforme `u` en le terme suivant.
Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = F(u_n, n)$ avec F une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

Par exemple :

— *Si $F : (x, y) \longmapsto 3x - 1$, alors $u_{n+1} = 3u_n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

— *Si $F : (x, y) \longmapsto \dfrac{x^2}{y+1}$, alors $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

On suppose que l'on a implémenté F au préalable en Python.

1) Calculer et représenter les premiers termes de la suite

Si le premier rang de la suite est n_0, on remplace `range(n)` par `range(n0,n)`.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Le script suivant calcule le $n^{\text{ième}}$ terme de la suite de terme initial x et le stocke dans la variable `u` :

```
u=x
for k in range(n):
    u=F(u,k)
```

A la place de `L=[0]*(n+1)`, on utilisera souvent `L=np.zeros(n+1)`. Il s'agit alors d'un tableau unidimensionnel et non d'une liste mais le fonctionnement est globalement le même (cf. chapitre 19).

Le script suivant calcule les premiers (du $0^{\text{ième}}$ au $n^{\text{ième}}$) termes de la suite de terme initial x et les stocke dans un tableau `L` :

```
import numpy as np
u=x
L=[0]*(n+1)#On crée une liste avec que des 0
L[0]=u
for k in range(n):
    u=F(u,k)#On calcule le terme suivant
    L[k+1]=u#On le met dans la coordonnée suivante
```

Dans le script précédent, on a commencé par créer une liste avec que des 0 et on a remplacé les 0 tour à tout par les valeurs successives de la suites. On aurait aussi pu créer une liste vide et lui ajouter à chaque étape le terme suivant :

```
u=x; L=[u]
for k in range(n):
    u=F(u,k)#On calcule le terme suivant
    L.append(u)#On l'ajoute à la liste
```

2) Le cas des suites récurrentes d'ordre 2

C'est un classique à connaître. On a besoin de deux variables que l'on met à jour à chaque étape puisque, pour calculer un terme, on a besoin des deux précédents.

Soient a, b, x, y des réels tels que $b \neq 0$. Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = x$, $u_1 = y$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

Si $n \in \mathbb{N}^*$, le script suivant calcule le $n^{\text{ième}}$ terme de la suite (en renvoyant `u`) :

```
u=x; v=y
for k in range(n):
    aux=v#On sauvegarde la valeur de u
    v=a*v+b*u#v contient le terme que l'on vient de calculer à l'aide des deux précédents
    u=aux#u devient le terme précédent
```

Il fallait introduire une variable `w` intermédiaire car, en écrivant `v=a*v+b*u`, on perd l'ancienne valeur de `v`.

Autre possibilité, pour condenser :

```
u=x; v=y
for k in range(n):
    u,v=v,a*v+b*u
```

Cette méthode se généralise bien pour des suites récurrentes d'ordre 2 qui ne sont pas forcément linéaires.

On peut aussi utiliser une liste contenant les valeurs précédentes :

```
L=[0]*(n+1)
L[0]=x; L[1]=y
for k in range(2,n+1):
    L[k]=a*L[k-1]+b*L[k-2]
```

3) Sommer ou multiplier les premiers termes d'une suite

Le script suivant calcule la somme des premiers (du $0^{\text{ième}}$ au $n^{\text{ième}}$) termes de la suite de terme initial x et la stocke dans `s` :

On a déjà vu dans le paragraphe précédent comment calculer une valeur approchée d'une somme à l'aide de Python. Lorsqu'il s'agit d'une suite récurrente, on fait exactement comme dans les paragraphes précédents mais, à chaque étape de la boucle, on ajoute le nouveau terme aux précédents.

```
u=x; s=u
for k in range(n):
    u=F(u,k)
    s=s+u
```

Remarques :

- On peut remplacer `s=s+u` par `s+=u`.
- Si on désire multiplier les termes d'une suite, on remplace juste `s=s+u` par `s=s*u` ou `s*=u`

Exemple : *Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons*

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

On pourrait calculer cette somme comme dans le paragraphe précédent :

```
S=1#Le 0-ième terme
for k in range(1,n+1):
    S=S+x**k/np.prod([i for i in range(1,k+1)])
```

Si on connaît 72 ! et que l'on veut calculer 73 !, il est dommage de recommencer tout le calcul, alors qu'il suffit de multiplier 72 ! par 73...

C'est une mauvaise idée puisque, à chaque terme ajouté, on calcule la factorielle du dénominateur sans utiliser le fait qu'on l'avait presque calculée au rang d'avant. Même remarque pour la puissance. On va faire mieux : pour tout $k \in \mathbb{N}$, posons $u_k(x) = \dfrac{x^k}{k!}$.

Le script ci-dessous crée une fonction qui prend en entrée x et calcule $S_n(x)$:

```
```

4) Représentation des termes d'une suite

Soit $n \in \mathbb{N}$. Représenter les $n+1$ premières valeurs d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ consiste à relier les points $(0, u_0)$, $(1, u_1)$, $(2, u_2)$, $\dots$, (n, u_n).

$n+1$ car il y a u_0.

Supposons que l'on ait stocké les $n+1$ premières valeurs d'une suite dans une liste L. Si on veut ensuite représenter graphiquement les termes en question, on utilise les commandes :

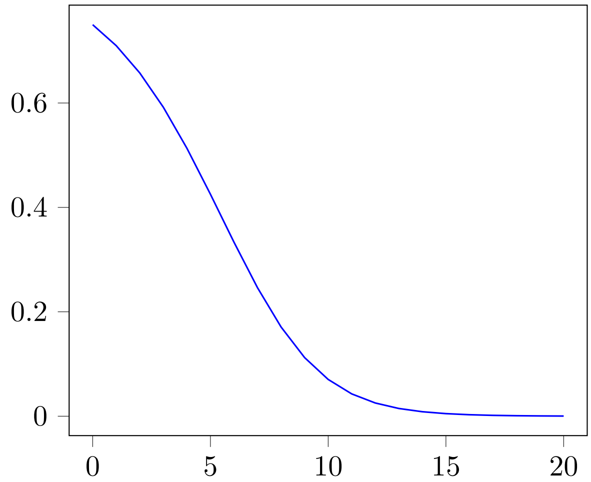
```
import matplotlib.pyplot as plt
plt.plot(range(n+1),L)
plt.show()
```

Exemples :

Nous étudierons ces deux suites suite dans le paragraphe III.3.b. du chapitre 8.

- *Représentons les 21 premières valeurs de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = 3/4$ et*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{u_n^2}{2} + \frac{4}{7}u_n.$$



- *Représentons les 16 premières valeurs de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que* $u_0 = 1$ *et*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = 1 + \frac{2}{u_n}.$$