Chapitre 5

Éléments de trigonométrie

I Notion de congruence sur $\mathbb{R}$

Définition. *Soient a, b et m des réels. On dit que a est congru à b modulo m si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = b + km$. On note alors $a \equiv b\,[m]$ ou $a \equiv b\,[m]$.*

Exemples :

Pour les élèves ayant suivi l'option *Maths expertes* en Terminale : la notion de congruence sur $\mathbb{Z}$ possède des propriétés supplémentaires dont certaines sont totalement fausses sur $\mathbb{R}$.

Proposition. . *Soient a, b, c et m des réels. Nous avons :*

1. *$a \equiv b\,[m]$ si et seulement si $b \equiv a\,[m]$ (symétrie).*
2. *Si $a \equiv b\,[m]$, alors $(a+c) \equiv (b+c)\,[m]$.*
3. *Si $a \equiv b\,[m]$, alors $ac \equiv bc\,[mc]$.*

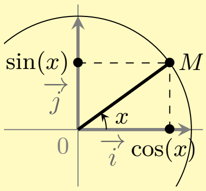
Démonstration.

□

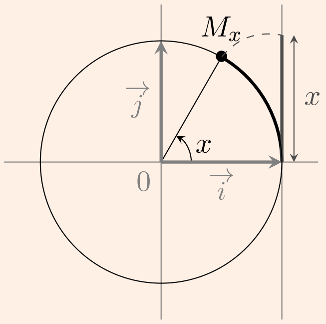
II Sinus et cosinus d'un réel

1) Définition

On parle de distance au sens algébrique du terme : si $x < 0$, on parcourt le cercle dans le sens anti-trigonométrique (i.e le sens des aiguilles d'une montre) sur une distance $-x$.



Définition (cercle trigonométrique). *Le cercle trigonométrique est le cercle de centre O et de rayon 1. À tout réel x, on associe un point M_x du cercle trigonométrique en parcourant le cercle sur une distance x dans le sens trigonométrique (i.e le sens inverse des aiguilles d'une montre) à partir du point de coordonnées $(1,0)$. Le réel x est alors appelé mesure (en radian) de l'angle orienté $(\vec{i}, \overrightarrow{OM_x})$.*



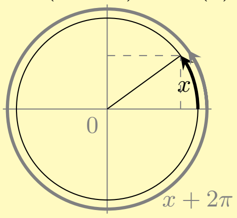
Définition (cosinus et sinus). *Soit $x \in \mathbb{R}$.*

- *L'abscisse du point M_x est appelée cosinus de x et notée $\cos(x)$.*
- *L'ordonnée du point M_x est appelée sinus de x et notée $\sin(x)$.*

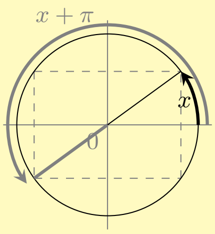
2) Premières propriétés

Soit $x \in \mathbb{R}$. Quelques angles associés :

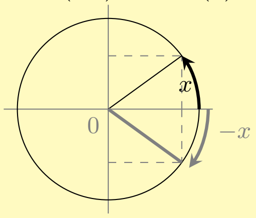
Tour complet
$\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$
$\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$



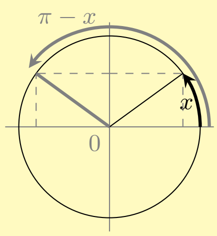
Demi-tour
$\cos(x + \pi) = -\cos(x)$
$\sin(x + \pi) = -\sin(x)$



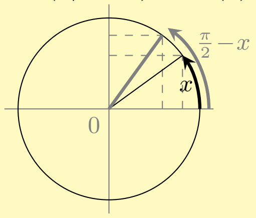
Angles opposés
$\cos(-x) = \cos(x)$
$\sin(-x) = -\sin(x)$



Angles supplémentaires
$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$
$\sin(\pi - x) = \sin(x)$



Angles complémentaires
$\cos(\pi/2 - x) = \sin(x)$
$\sin(\pi/2 - x) = \cos(x)$



Proposition.
- *(**identité fondamentale**) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.*
- *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du fait que, si un point du plan de coordonnées (a, b) est sur le cercle centré en l'origine et de rayon 1, alors $a^2 + b^2 = 1$. Ensuite $a^2 \leqslant a^2 + b^2 = 1$ donc $|a| \leqslant 1$. De même $|b| \leqslant 1$. □

On rappelle que, la longueur d'un cercle de rayon 1 est égale à 2π. Ainsi, lorsqu'on ajoute ou enlève 2π (ou $2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$), on fait un tour complet (ou plusieurs) donc le point correspondant sur le cercle est le même :

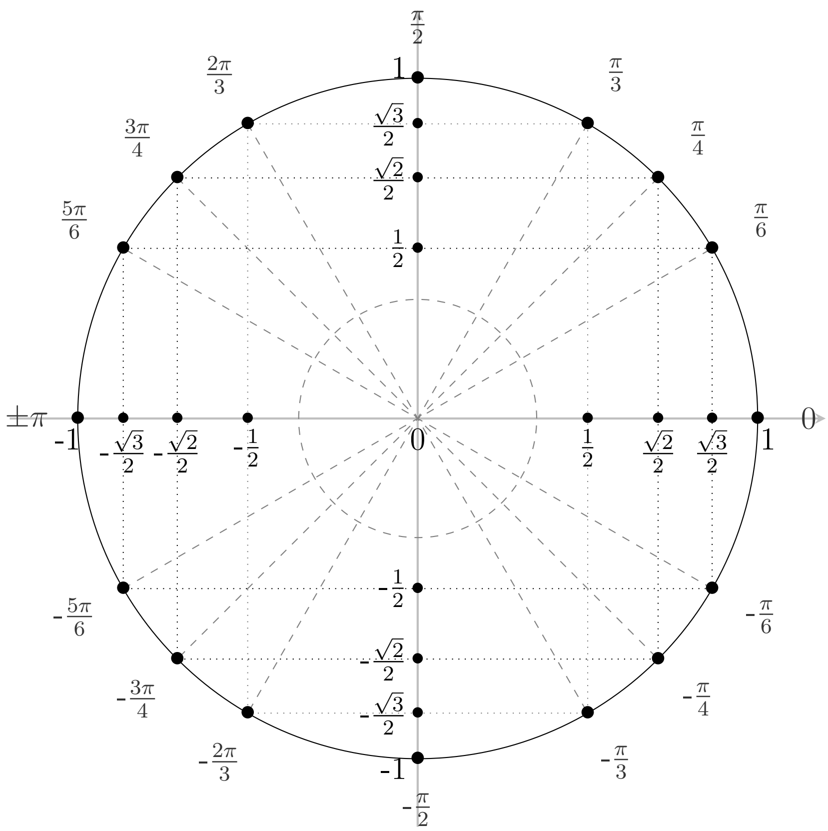
Proposition. *Pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$,*

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos(x) \qquad \text{et} \qquad \sin(x + 2k\pi) = \sin(x).$$

Proposition (valeurs remarquables).

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

Démonstration. Admis.



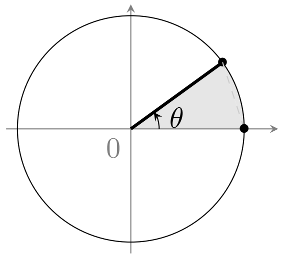
Convertissons radians en degrés :

$$\pi/6 = 30°$$
$$\pi/4 = 45°$$
$$\pi/3 = 60°$$
$$\pi/2 = 90°$$
$$\pi = 180°$$
$$2\pi = 360°$$

Plus généralement un angle $x \in [0\,;2\pi]$ en radian est égal à $\dfrac{180x}{\pi}$ degrés.

Sur le dessin ci-dessus, on a identifié un réel x avec son point correspondant M_x sur le cercle trigonométrique pour simplifier les notations. Les cosinus et sinus des angles qui y apparaissent s'obtiennent à partir des valeurs remarquables en utilisant les formules dans la marge (qui découlent de simples considérations géométriques).

Remarque : L'aire d'une portion de disque d'angle $\theta \in]0\,;2\pi[$ de rayon r est $\theta r^2/2$. En effet, l'aire est proportionnelle à l'angle (penser à une part de tarte), et un angle de 2π donne une aire de πr^2.



3) Signe d'un sinus, d'un cosinus

À l'aide de considérations géométriques, on arrive à déterminer facilement le signe du sinus ou cosinus d'un réel de $[-\pi\,;\pi]$:

Rappelons que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos(x),$$
$$\sin(x + 2k\pi) = \sin(x).$$

Pour un réel quelconque, on enlève ou ajoute un certain nombre de fois 2π, pour se ramener à un angle de $[-\pi\,;\pi]$ ayant même sinus et même cosinus.

Et réciproquement ? Connaissant le signe du sinus ou d'un cosinus d'un réel, que peut-on dire sur ce réel ? Retenons la proposition suivante :

Inutile de l'apprendre par coeur : un dessins et du bon sens devraient suffire. ⚠ Les quantificateurs d'existence ne sont pas optionnels...

Proposition. *Soit $x \in \mathbb{R}$. On a*

$\cos(x) > 0 \iff$

$\cos(x) < 0 \iff$

$\cos(x) \neq 0 \iff$

$\cos(x) = 0 \iff$

$\sin(x) > 0 \iff$

$\sin(x) < 0 \iff$

$\sin(x) \neq 0 \iff$

$\sin(x) = 0 \iff$

L'ensemble des réels congru à $\pi/2$ modulo π se note $\dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$.

L'ensemble des réels congru à 0 modulo π se note $\pi\mathbb{Z}$.

4) Formules de trigonométrie

Les formules suivantes sont admises (elles découlent de considérations géométriques) :

> En fait seules les deux premières formules sont au programme. Mais cela ne coûte rien de retenir les deux dernières puisqu'elles découlent des deux premières en se rappelant que $\cos(-b) = \cos(b)$ et $\sin(-b) = -\sin(b)$.

Proposition (formules d'addition). *Pour tous réels a et b,*

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$
$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$
$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$
$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$$

Exemple :

Il y a de nombreuses autres formules sur les sinus et cosinus. De telles formules sont appelées formules de trigonométrie. Conformément au programme, ces autres formules ne sont pas exigibles. Mais il faut savoir les redémontrer si on le demande à partir des formules d'addition :

> Leur preuve fait l'objet de l'exercice 1 de la feuille d'exercice n° 5.

- **Formules de duplication.**

> On prend $a = b$ et on utilise l'identité fondamentale.

  — $\sin(2a) = 2\cos(a)\sin(a)$

  — $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$

- **Formules de linéarisation.**

> On part du terme de droite et, via les formules d'addition, on retrouve celui de gauche.

  — $\cos(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right)$

  — $\sin(a)\sin(b) = -\dfrac{1}{2}\left(\cos(a+b) - \cos(a-b)\right)$

  — $\sin(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}\left(\sin(a+b) + \sin(a-b)\right)$

  — $\cos^2(a) = \dfrac{1}{2}(1+\cos(2a))$ et $\sin^2(a) = \dfrac{1}{2}(1-\cos(2a))$

  Par exemple

> Graphiquement le point du cercle trigonométrique correspondant à $\pi/8$ se trouve dans le quart supérieur gauche (où les sinus et cosinus sont positifs).

- **Formules de factorisation.**

> On écrit que
> $$a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}$$
> $$b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}$$
> puis on utilise les formules d'addition.

  — $\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\cos\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$

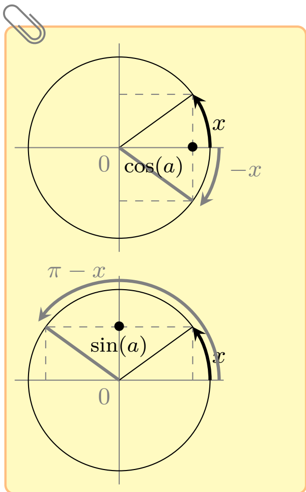
  — $\cos(a) - \cos(b) = -2\sin\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\sin\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$

  — $\sin(a) + \sin(b) = 2\sin\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\cos\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$

  — $\sin(a) - \sin(b) = 2\cos\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\sin\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$

5) Équations trigonométriques

La proposition découle de considérations géométriques :



Proposition. *Soient a et x des réels. On a*

$$\begin{array}{rcccc} \cos(x)=\cos(a) & \Longleftrightarrow & x\equiv a\,[2\pi] & \text{ou} & x\equiv -a\,[2\pi] \\ \sin(x)=\sin(a) & \Longleftrightarrow & x\equiv a\,[2\pi] & \text{ou} & x\equiv \pi-a\,[2\pi] \end{array}$$

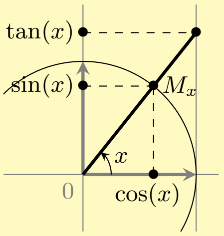
Exemples :

- *Résoudre* $4\sin^2(2x)=3$ *d'inconnue* $x\in\mathbb{R}$.

- *Résoudre* $\cos(x)-\sin(x)=\sqrt{\frac{3}{2}}$ *d'inconnue* $x\in\mathbb{R}$.

III Tangente d'un réel

Interprétation graphique : Le théorème de Thalès entraîne que $\tan(x)$ est l'ordonnée (algébrique) du point d'abscisse 1 de cette droite.



Définition. *Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$, on définit la tangente de x le réel*

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Il découle des propriétés de sinus et cosinus que :

Proposition. *Pour tous $x \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$ et $k \in \mathbb{Z}$, $\tan(x + k\pi) = \tan(x)$.*

Proposition (valeurs remarquables).

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\tan(x)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

Ne pas confondre les points dont la tangente est nulle et les points dont la tangente n'est pas définie.

Proposition. *Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$. On a*

$\tan(x) > 0 \quad \Longleftrightarrow$

$\tan(x) < 0 \quad \Longleftrightarrow$

$\tan(x) \neq 0 \quad \Longleftrightarrow$

$\tan(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow$

Comment obtenir ces formules ? La tangente d'un réel (non congru à $\pi/2$ modulo π) est strictement positive si et seulement si son cosinus et son sinus ont même signe. Elle est strictement négative si et seulement si son cosinus et son sinus sont de signe opposé. Elle a les mêmes valeurs d'annulation que son sinus.