Chapitre 4

Sommes et produits de réels

I Résultats généraux sur les sommes et produits de réels

1) Famille finies de réels

Si $I = [\![p\,;n]\!]$ avec p et n des entiers naturels tels que $p \leqslant n$, alors on note aussi $(x_i)_{p\leqslant i\leqslant n}$ la famille $(x_i)_{i\in[\![p\,;n]\!]}$.

Définition (familles finies de réels). *Soit I une partie finie de $\mathbb{N}$. On appelle famille de nombres réels indexée par I la donnée, pour chaque entier naturel i de I, d'un unique nombre réel x_i. On la note $(x_i)_{i\in I}$. L'ensemble I est appelé ensemble des indices de la famille.*

Exemples :

Si $I = [\![p\,;n]\!]$, on note aussi $\max\limits_{p\leqslant i\leqslant n} x_i$ et $\min\limits_{p\leqslant i\leqslant n} x_i$.

Remarques :

- Si I est non vide et finie, l'ensemble $A = \{x_i \,|\, i \in I\}$ admet un maximum et un minimum et on note souvent $\max\limits_{i\in I} x_i$ et $\min\limits_{i\in I} x_i$ au lieu de $\max A$ et $\min A$.
- L'indice i est muet et donc : par exemple.

2) Notations $\sum$ et $\prod$

La notation $\sum\limits_{i=p}^{n} x_i$ (resp. $\prod\limits_{i=p}^{n} x_i$) se lit « somme (resp. produit) des x_i pour i allant de p à n » .
On dit que p et n sont les bornes de la somme (resp. du produit).

Définition. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $x_0, x_1, \dots, x_n$ sont $n+1$ réels, on note*

$$\sum_{i=0}^{n} x_i = x_0 + x_1 + \cdots + x_{n-1} + x_n \qquad \text{et} \qquad \prod_{i=0}^{n} x_i = x_0 x_1 \dots x_{n-1} x_n.$$

Si $p \in [\![0\,;n]\!]$, on note

$$\sum_{i=p}^{n} x_i = x_p + x_{p+1} + \cdots + x_{n-1} + x_n \qquad \text{et} \qquad \prod_{i=p}^{n} x_i = x_p x_{p+1} \dots x_{n-1} x_n.$$

Plus généralement, si $(x_i)_{i\in I}$, est une famille de nombres indexée par une partie finie I de $\mathbb{N}$, on note $\sum\limits_{i\in I} x_i$ (resp. $\prod\limits_{i\in I} x_i$) la somme (resp. le produit) de tous les nombres de la famille.

Exemples :

Remarques :

- Si $I = \varnothing$, on adopte les conventions $\sum_{i \in I} x_i = 0$ et $\prod_{i \in I} x_i = 1$.
- Dans la notation $\sum_{i \in I}$ (resp. $\prod_{i \in I}$) l'indice i est une variable muette (on peut donc la remplacer par une autre variable... attention cependant à ne pas la remplacer par une variable déjà utilisée, comme p et n ici). Chaque indice i n'apparaît qu'une seule fois dans la somme (resp. le produit). De plus la commutativité de l'addition (resp. la multiplication) dans $\mathbb{R}$ fait qu'il n'est pas nécessaire de préciser l'ordre dans lequel on effectue la somme.

  ⚠ L'indice i n'existe que dans la somme (resp. le produit). Ainsi le résultat ne dépend en aucun cas de l'indice. De plus il ne faut jamais introduire l'indice (sinon on le fixe ; or il varie dans la somme).

⚠ L'ensemble I doit être fini. Si ce n'est pas le cas, alors la somme et le produit ne sont pas bien définis en toute généralité (il faut des conditions supplémentaires sur les x_i, $i \in \mathbb{N}$). Si $I = \mathbb{N}$, alors on parle de série pour désigner la somme (nous verrons cela au deuxième semestre).

- Il y a termes dans la somme $\sum_{i=p}^{n} x_i$ (resp. dans le produit $\prod_{i=p}^{n} x_i$).
-
- Si $x \in \mathbb{R}$, alors

3) Premières sommes usuelles

Dans le chapitre 1, nous avons montré (par récurrence) :

Théorème (Somme des premiers entiers). *Pour tout $n \in \mathbb{N}$,* $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Les sommes des premiers carrés et des premiers cubes ne doivent plus être connue par coeur dans le nouveau programme. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il s'agit de

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Elles sont si utiles et si classiques qu'il faut absolument savoir les redémontrer sans erreur si le sujet le demande. On procède par récurrence :

Théorème (sommes géométriques). *Si $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, alors*

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \begin{cases} n+1 & \text{si} \quad x = 1 \\ \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} & \text{sinon.} \end{cases}$$

DÉMONSTRATION.

□

4) Propriétés de la somme et du produit

Les propriétés suivantes se montrent par récurrence sur le nombre d'éléments d'ensemble des indices de la somme, en utilisant les propriétés de l'addition et du produit de nombres et la compatibilité avec les inégalités. Nous les laissons en exercice.

Proposition. *Soient $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_i)_{i\in I}$ deux familles finies de réels.*

- *Factorisation : Si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\displaystyle\sum_{i\in I}(\lambda x_i) = \lambda\left(\sum_{i\in I} x_i\right)$.*
- *Linéarité : $\displaystyle\sum_{i\in I}(x_i + y_i) = \sum_{i\in I} x_i + \sum_{i\in I} y_i$.*

- *Sommation par paquets : Si* $I = J \cup K$ *avec* $J \cap K = \varnothing$, *alors* $\displaystyle\sum_{i\in I} x_i = \sum_{i\in J} x_i + \sum_{i\in K} x_i$.
- *Relation de Chasles : Si* $I = [\![p\,;n]\!]$ *avec* $p < n$, *alors*

$$\forall m \in [\![p\,;n]\!], \qquad \sum_{i=p}^{n} x_i = \sum_{i=p}^{m} x_i + \sum_{i=m+1}^{n} x_i.$$

- *Si pour tout* $i \in I$, $x_i \leqslant y_i$, *alors* $\displaystyle\sum_{i\in I} x_i \leqslant \sum_{i\in I} y_i$.

  Si, de plus, il existe $i_0 \in [\![1\,;n]\!]$ *tel que* $x_{i_0} < y_{i_0}$, *alors* $\displaystyle\sum_{i\in I} x_i < \sum_{i\in I} y_i$.
- *Inégalité triangulaire :* $\displaystyle\left|\sum_{i\in I} x_i\right| \leqslant \sum_{i\in I} |x_i|$.

Remarque :

- La plupart des sommes usuelles du cours « commencent à 0 ». Lorsqu'on rencontre une somme pour laquelle ce n'est pas le cas, un grand classique (qui découle de la relation de Chasles) est de la faire démarrer à 0 en ajoutant (et donc en enlevant) les termes manquants :

  Il manque les deux premiers termes. Réflexe : on les ajoute à la somme et on les enlève.

  Par exemple, si $n \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$,

  Ici il manque les termes de rangs 0 à $p-1$ (attention pas p).

  Plus généralement, si n *et* p *sont des entiers naturels tels que* $p < n$ *et si* $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$,

- Pour utiliser la linéarité, i.e. transformer l'addition de deux sommes en une seule somme, il faut bien vérifier que les deux sommes ont les mêmes bornes. Sinon on commence d'abord par s'y ramener quitte à ce qu'il reste quelques termes dans l'addition en dehors de la somme.

  Par exemple

- L'exemple le plus classique de sommation par paquet est de séparer la somme en la somme des termes pairs et la somme des termes impairs.

  Par exemple

  Cette dernière formule n'est pas au programme mais il faut savoir la retrouver.

Proposition. *Soient $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_i)_{i\in I}$ deux familles finies de réels.*

- *Si $n \in \mathbb{N}$ (ou si $n \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}$ et tous les x_i, $i \in I$, sont non nuls), alors $\displaystyle\prod_{i\in I} x_i^n = \left(\prod_{i\in I} x_i\right)^n$.*
- *Si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\displaystyle\prod_{i\in I}(\lambda x_i) = \lambda^q \left(\prod_{i\in I} x_i\right)$, où q désigne le nombre d'éléments de I.*
- $\displaystyle\prod_{i\in I}(x_i y_i) = \left(\prod_{i\in I} x_i\right)\left(\prod_{i\in I} y_i\right)$ *et* $\displaystyle\left|\prod_{i\in I} x_i\right| = \prod_{i\in I} |x_i|$
- *Si pour tout $i \in I$, $0 \leqslant x_i \leqslant y_i$, alors $\displaystyle\prod_{i\in I} x_i \leqslant \prod_{i\in I} y_i$.*

5) Changement d'indice

En fait il y a plusieurs façons d'écrire une somme. Par exemple :

et donc

On parle de changement d'indice. Il s'agit simplement d'une renumérotation des termes sommés. En toute généralité, il y a trois types possibles de changement d'indices :

Proposition. *Soient p, n et q des entiers naturels tels que $p \leqslant n$. Soit $(x_i)_{p\leqslant i\leqslant n}$ une famille de réels. Nous avons*

Il ne soit rester aucune trace de l'indice d'origine.

Remarque : Il est fortement conseillé de toujours vérifier un changement d'indice à l'aide du premier et du dernier terme. Pour ne pas se tromper, on peut écrire ce que donne le changement d'indice sur les inégalités $p \leqslant i \leqslant n$:

- Si on pose $i = k - q$ (i.e. $k = q + i$) alors, lorsque i varie de p à n, k varie de $q + p$ à $q + n$.
- Si on pose $i = k + q$ (i.e. $k = i - q$) alors, lorsque i varie de p à n, k varie de $p - q$ à $n - q$.
- Si on pose $i = q - k$ (i.e. $k = q - i$) alors, lorsque i varie de p à n, k varie de $q - n$ à $q - p$.

On inverse bien $q - p$ et $q - n$ car on préfère mettre la borne inférieure de la somme en dessous.

Exemples :

- *Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculons* $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(n-j+1)^2$.

- *Si on pose $k = i-1$, $j = i+1$ et $\ell = 8-i$, alors*

On pourrait penser à d'autres types de changement de variables, mais tous ne sont pas autorisés. Par exemple le changement de variables $k = 2i$ est interdit (car $2i$ ne ne parcourt que des entiers pairs, alors qu'un indice de somme i prend toutes les valeurs d'entiers entre les bornes de la somme, y compris les impairs)... à moins que les termes de rang impairs soient nuls.

6) Sommes et produits télescopiques

Proposition (somme télescopique). *Soient p et n des entiers naturels tels que $p \leqslant n$. Soit $(y_k)_{p\leqslant k\leqslant n+1}$ une famille de réels. Alors*

$$\sum_{k=p}^{n}(y_{k+1}-y_k) = y_{n+1}-y_p.$$

On dit qu'il s'agit d'une somme télescopique.

D'autres sommes télescopiques : lorsque $(y_k)_{p-1\leqslant k\leqslant n+1}$ est une famille de réels,

$$\sum_{k=p}^{n}(y_k-y_{k+1}) = y_p-y_{n+1}$$

$$\sum_{k=p}^{n}(y_k-y_{k-1}) = y_n-y_{p-1}.$$

Démonstration. *Preuve informelle :*

Preuve formelle :

On peut faire la même chose avec des produits télescopiques : lorsque $(y_k)_{p-1\leqslant k\leqslant n+1}$ est une une famille de réels non nuls,

$$\prod_{k=p}^{n}\frac{y_{k+1}}{y_k} = \frac{y_{n+1}}{y_p}$$

$$\prod_{k=p}^{n}\frac{y_k}{y_{k+1}} = \frac{y_p}{y_{n+1}}$$

$$\prod_{k=p}^{n}\frac{y_{k-1}}{y_k} = \frac{y_{p-1}}{y_n}.$$

□

Exemples :

7) Transformer des produits en sommes

Une des raisons qui pousse à s'intéresser davantage aux sommes qu'au produits dans ce cours et que l'on peut transformer des sommes en produits « assez facilement » .

Nous reverrons bientôt les fonctions logarithme et exponentielles. Elles permettent de faire le lien entre somme et produit dans le cas réel strictement positifs : si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille finie de réels strictement positifs, alors

Après calcul, il suffit de repasser à l'exponentielle.

II Factorielles et coefficients binomiaux

1) Factorielle d'un entier

Voici les premières valeurs des factorielles :

$$\begin{aligned}1! &= 1\\ 2! &= 2\\ 3! &= 6\\ 4! &= 24\\ 5! &= 120\\ 6! &= 720\\ 7! &= 5040\\ 8! &= 40320\\ 9! &= 362880\\ 10! &= 3628800\\ 11! &= 39916800\\ 12! &= 479001600\end{aligned}$$

Il faut connaitre au moins les six premières.

Définition. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle factorielle de n, et on note $n!$, le produit des entiers de 1 à n, c'est-à-dire $n! = \prod_{i=1}^{n} i$. On pose $0! = 1$.*

Remarques :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n!$ se lit « factorielle n ».
- Nous avons $0! = 1$ et :
  - pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n! = n \times (n-1)!$.
  - pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)! = (n+1) \times n!$.
- Pour passer de $3!$ à $2!$ on divise par 3, puis pour passer de $2!$ à $1!$ on divise encore par 2, donc pour passer de $1!$ à $0!$, il est naturel de vouloir diviser par 1 et on obtient alors $0! = 1$. Par conséquent la convention $0! = 1$ est naturelle.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  - Exprimons le produit des nombres pairs de 2 à $2n$ à l'aide de factorielles.

Ces deux derniers résultats sur le produits des pairs et des impairs ne sont pas à connaître par cœur. Ce sont des immenses classiques qu'il faut savoir refaire.

— Exprimons le produit des nombres impairs de 1 à $2n+1$ à l'aide de factorielles.

2) Coefficients binomiaux

Définition. *Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0\,;n]\!]$, on note* $\dbinom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

Ce nombre se lit « p parmi n ».

Si $p \geqslant 2$, on a

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!}.$$

Pour cette deuxième formule, on commence à former $n!$ mais on s'arrête dès que le produit contient p nombre autant de termes que le produit au dénominateur qui se trouve être $p!$.

Remarques :

- Les entiers $\dbinom{n}{p}$, $0 \leqslant p \leqslant n$, sont appelée les coefficients binomiaux.
- La deuxième formule de la définition s'obtient à partir de la première en remarquant que

  C'est plutôt cette formule que l'on utilise dans la pratique lorsque l'on veut calculer des coefficients binomiaux. La première formule formule de la définition est à réservée pour les raisonnements théoriques.
- Nous verrons dans le chapitre *Compléments de combinatoire*, que $\dbinom{n}{p}$ est le nombre de chemins réalisant p succès pour n répétitions dans un arbre binaire, mais aussi le nombre de façons de choisir p éléments (distincts) parmi n éléments (distincts).

Exemple :

Proposition. *Soit n et p deux entiers naturels tels que $p \leqslant n$.*

- $\dbinom{n}{n} = \dbinom{n}{0} = 1.$
- *Si $n \in \mathbb{N}^*$, alors* $\dbinom{n}{n-1} = \dbinom{n}{1} = n.$
- *Si $n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$, alors* $\dbinom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}.$
- $\dbinom{n}{p} = \dbinom{n}{n-p},$
- *Si $p \in \mathbb{N}^*$, alors* $p\dbinom{n}{p} = n\dbinom{n-1}{p-1}.$

Cette formule est appelée non officiellement « formule du chef ». On verra pourquoi dans le chapitre 10.

On étend souvent la définition en posant : $\binom{n}{p} = 0$ lorsque $n \in \mathbb{N}$ et $p \notin [\![1\,;n]\!]$. Dans ce cas, la formule de Pascal est vraie pour tous entiers naturels n et p.

- *Formule de Pascal : si $1 < p < n$, alors $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$.*

DÉMONSTRATION.

Par récurrence (sur n) utilisant la formule de Pascal, on obtient :

Corollaire. *Si n et p sont deux entiers naturels tels que $p \leqslant n$, alors $\binom{n}{p} \in \mathbb{N}$.*

$\rightsquigarrow$ EXERCICE.

3) Formule du binôme de Newton

Théorème (Formule du binôme de Newton). *Soient x et y deux réels. Pour tout entier naturel n, nous avons*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

DÉMONSTRATION. Nous reportons la preuve au chapitre 10... vous n'êtes pas encore prêts ! □

Remarques :

III Sommes doubles et inversion de sommes

1) Notion de somme double

L'ensemble des couples d'entiers naturels est noté $\mathbb{N}^2$.

Définition. *On appelle couple d'entiers naturels, la donnée de deux entiers naturels x et y dans cet ordre. On le note (x, y).*

Définition. *Soit A une partie finie de $\mathbb{N}^2$. On appelle famille de nombres réels indexée par A la donnée, pour chaque couple d'entiers naturels (i, j) de A, d'un unique nombre réel $x_{i,j}$. On la note $(x_{i,j})_{(i,j)\in A}$.*

On note $\displaystyle\sum_{(i,j)\in A} x_{i,j}$ la somme des éléments de la famille. On dit qu'il s'agit d'une somme double.

Si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille de nombres réels indexée par une partie finie I de $\mathbb{N}$, alors on dit que la somme $\displaystyle\sum_{i\in I} x_i$ des éléments de la famille est une somme simple.

Exemple : *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tous i et j dans $[\![1, n]\!]$, notons $x_{ij} = 3ij^2$.*

2) Le cas d'un domaine rectangulaire

Supposons que $A = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \,|\, m \leqslant i \leqslant n,\ p \leqslant j \leqslant q\}$ avec m, n, p et q des entiers naturels tels que $m \leqslant n$ et $p \leqslant q$.

On note alors $(x_{i,j})_{\substack{m\leqslant i\leqslant n\\ p\leqslant j\leqslant q}}$ au lieu de $(x_{i,j})_{(i,j)\in A}$ et $\displaystyle\sum_{\substack{m\leqslant i\leqslant n\\ p\leqslant j\leqslant q}} x_{i,j}$ au lieu de $\displaystyle\sum_{(i,j)\in A} x_{i,j}$.

Si $m = p$ et $q = n$, on note aussi $(x_{i,j})_{p\leqslant i,j\leqslant n}$ pour la famille et $\displaystyle\sum_{p\leqslant i,j\leqslant n} x_{i,j}$ pour la somme.

On peut ranger les éléments de la famille dans un tableau :

$i \backslash j$	p	$p+1$	$\cdots$	$q-1$	q
m	$x_{m,p}$	$x_{m,p+1}$	$\cdots$	$x_{m,q-1}$	$x_{m,q}$
$m+1$	$x_{m+1,p}$	$x_{m+1,p+1}$	$\cdots$	$x_{m+1,q-1}$	$x_{m+1,q}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$n-1$	$x_{n-1,p}$	$x_{n-1,p+1}$	$\cdots$	$x_{n-1,q-1}$	$x_{n-1,q}$
n	$x_{n,p}$	$x_{n,p+1}$	$\cdots$	$x_{n,q-1}$	$x_{n,q}$

Pour sommer les éléments de la famille (c'est-à-dire les éléments du tableau ci-dessus), on peut décider de

- sommer d'abord chaque ligne puis prendre la somme de tous les résultats. Cela donne :

- ou bien sommer d'abord chaque colonne puis prendre la somme de tous les résultats. Cela donne :

Résumons cela :

Le nombre de termes intervenant dans cette somme est égal au nombre de termes dans le tableau. Il y en a $(n-m+1)(q-p+1)$ puisqu'il s'agit d'un tableau à $n-m+1$ lignes et $q-p+1$ colonnes.

Théorème (de Fubini). *Nous avons*

$$\sum_{i=m}^{n}\left(\sum_{j=p}^{q} x_{i,j}\right) = \sum_{\substack{m\leqslant i\leqslant n\\ p\leqslant j\leqslant q}} x_{i,j} = \sum_{j=p}^{q}\left(\sum_{i=m}^{n} x_{i,j}\right).$$

Exemples :

- *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tous i et j dans $[\![1, n]\!]$, notons $x_{ij} = 3ij^2$.*

- *(développement/factorisation) Si $x_m, \ldots, x_n, y_p, \ldots, y_q$ sont des réels, alors*

$$\sum_{\substack{m\leqslant i\leqslant n\\ p\leqslant j\leqslant q}} x_i y_j =$$

En particulier, si $m = p = 1$ et $q = n$ alors $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_i y_j =$

Ne faites pas dire à Fubini ce qu'il n'a pas dit : l'égalité suivante est complètement fausse !

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)$$

(il suffit de remarquer que $x_1x_2 + y_1y_2$ n'est pas égal à $x_1x_2 + x_1y_2 + y_1x_2 + y_1y_2 = (x_1 + x_2) \times (y_1 + y_2)$ en général).

3) Le cas d'un domaine triangulaire

a) Somme des termes sur-diagonaux

Supposons que $A = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \,|\, p \leqslant i \leqslant j \leqslant n\}$ avec p et n des entiers naturels tels que $p \leqslant n$. On note alors $(x_{i,j})_{p \leqslant i \leqslant j \leqslant n}$ au lieu de $(x_{i,j})_{(i,j)\in A}$ et

$$\sum_{p \leqslant i \leqslant j \leqslant n} x_{i,j} \quad \text{au lieu de} \quad \sum_{(i,j)\in A} x_{i,j}.$$

Combien y a-t-il d'éléments dans cette somme ? Autant que dans le tableau : 1 sur la première colonne, 2 sur la deuxième, 3 sur la troisième, etc., n sur la $n^{\text{ième}}$. Il y en a donc

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

On peut ranger les éléments de la famille dans un tableau :

$i \backslash j$	p	$p+1$	$\cdots$	k	$\cdots$	$n-1$	n
p	$x_{p,p}$	$x_{p,p+1}$	$\cdots$	$x_{p,k}$	$\cdots$	$x_{p,n-1}$	$x_{p,n}$
$p+1$		$x_{p+1,p+1}$	$\cdots$	$x_{p+1,k}$	$\cdots$	$x_{p+1,n-1}$	$x_{p+1,n}$
$\vdots$			$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
k				$x_{k,k}$	$\cdots$	$x_{k,n-1}$	$x_{k,n}$
$\vdots$					$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$n-1$						$x_{n-1,n-1}$	$x_{n-1,n}$
n							$x_{n,n}$

Pour sommer les éléments de la famille (c'est-à-dire les éléments du tableau ci-dessus), on peut décider de

- sommer d'abord chaque ligne puis prendre la somme de tous les résultats. Cela donne :

- ou bien sommer d'abord chaque colonne puis prendre la somme de tous les résultats. Cela donne :

Moyen mnémotechnique pour retrouver la formule $\displaystyle\sum_{p \leqslant i \leqslant j \leqslant n} = \sum_{i=p}^{n}\sum_{j=i}^{n}$ (c'est analogue pour l'autre) :

- Pour la somme extérieure, **qui ne peut surtout pas dépendre de j (sinon c'est une erreur grave : j ne peut pas exister en dehors de la somme intérieure puisque c'est son indice de sommation)**, on « efface $j \leqslant$ » et il reste $p \leqslant i \leqslant n$. Ainsi i va de p à n.
- Un fois i fixé, on voit que $i \leqslant j \leqslant n$. Ainsi j va de i à n dans la somme intérieure.

Résumons cela :

Théorème (de Fubini). *Nous avons*

$$\sum_{i=p}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} x_{i,j}\right) = \sum_{p \leqslant i \leqslant j \leqslant n} x_{i,j} = \sum_{j=p}^{n}\left(\sum_{i=p}^{j} x_{i,j}\right).$$

Exemple : *Calculons* $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} \frac{i}{j}$.

b) Somme des termes sur-diagonaux stricts

Supposons que $A = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \,|\, p \leqslant i < j \leqslant n\}$ avec p et n des entiers naturels tels que $p < n$. On note alors $(x_{i,j})_{p \leqslant i < j \leqslant n}$ au lieu de $(x_{i,j})_{(i,j)\in A}$ et

$$\sum_{p \leqslant i < j \leqslant n} x_{i,j} \qquad \text{au lieu de} \qquad \sum_{(i,j)\in A} x_{i,j}.$$

> Combien y a-t-il d'éléments dans cette somme ? Autant que dans le tableau : 1 sur la deuxième colonne, 3 sur la deuxième, 4 sur la troisième, etc., $n-1$ sur la $n^{\text{ième}}$. Il y en a donc
> $$\sum_{j=0}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}.$$

On peut ranger les éléments de la famille dans un tableau :

$i \backslash j$	p	$p+1$	$p+2$	$\cdots$	k	$k+1$	$\cdots$	$n-1$	n
p		$x_{p,p+1}$	$x_{p,p+2}$	$\cdots$	$x_{p,k}$	$x_{p,k+1}$	$\cdots$	$x_{p,n-1}$	$x_{p,n}$
$p+1$			$x_{p+1,p+2}$	$\cdots$	$x_{p+1,k}$	$x_{p+1,k+1}$	$\cdots$	$x_{p+1,n-1}$	$x_{p+1,n}$
$\vdots$				$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$k-1$					$x_{k-1,k}$	$x_{k-1,k+1}$	$\cdots$	$x_{k-1,n-1}$	$x_{k-1,n}$
k						$x_{k,k+1}$	$\cdots$	$x_{k,n-1}$	$x_{k,n}$
$\vdots$							$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$n-2$								$x_{n-2,n-1}$	$x_{n-2,n}$
$n-1$									$x_{n-1,n}$
n									

Pour sommer les éléments de la famille (c'est-à-dire les éléments du tableau ci-dessus), on peut décider de

- sommer d'abord chaque ligne puis prendre la somme de tous les résultats. Cela donne :

- ou bien sommer d'abord chaque colonne puis prendre la somme de tous les résultats. Cela donne :

Moyen mnémotechnique pour retrouver la formule $\sum_{p\leqslant i<j\leqslant n} = \sum_{j=p+1}^{n}\sum_{i=p}^{j-1}$ (c'est analogue pour l'autre) :

- Pour la somme extérieure, **qui ne peut surtout pas dépendre de i (sinon c'est une erreur grave : i ne peut pas exister en dehors de la somme intérieure puisque c'est son indice de sommation)**, on « efface $\leqslant i$ » et il reste $p < j \leqslant n$, i.e. $p+1 \leqslant j \leqslant n$. Ainsi j va de $p+1$ à n.
- A j fixé, on voit que $p \leqslant i < j$, i.e. $p \leqslant i \leqslant j-1$. Ainsi i va de p à $j-1$ dans la somme intérieure.

Résumons cela :

Théorème (de Fubini). *Nous avons*

$$\sum_{i=p}^{n-1}\left(\sum_{j=i+1}^{n} x_{i,j}\right) = \sum_{p\leqslant i<j\leqslant n} x_{i,j} = \sum_{j=p+1}^{n}\left(\sum_{i=p}^{j-1} x_{i,j}\right).$$

Exemples :

- *Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. Calculons $\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} ij$ de deux manières.*

- *(développement du carré d'une somme) Si* $x_1, \ldots, x_n$ *sont des nombres réels, alors*

IV Calculs de sommes et de produits avec Python

Le but de ce paragraphe est de calculer des valeurs approchées avec Python d'une somme $\sum_{i \in I} u_i$ ou d'un produit $\prod_{i \in I} u_i$ d'une famille de réels $(u_i)_{i \in I}$ indexée par un ensemble **fini** I dans le cas où l'on connaît **explicitement** les termes que l'on somme ou que l'on multiplie. Comment faire ?

Nous verrons dans le chapitre 7, comment sommer ou multiplier les termes d'une suite définie par récurrence.

- On code la famille I en une liste Python `I`. En général :
  - si $n \in \mathbb{N}^*$ et $I = [\![0\,;n]\!]$, on prend `I=range(n+1)`.
  - si $n \in \mathbb{N}^*$ et $I = [\![1\,;n]\!]$, on prend `I=range(1,n+1)`.
  - si m et n sont des entiers relatifs tels que $m < n$ et si $I = [\![m\,;n]\!]$, on prend `I=range(m,n+1)`.

  Bien sûr I peut être quelconque (fini) mais, en général, soit on arrive à se ramener à l'un des cas précédents soit on construit `I` à la main (lorsqu'il y a peu d'éléments).
- Si les expressions des réels de la famille $(u_i)_{i \in I}$ sont compliquées, on peut construire une fonction en Python (appelons-la `u`), qui prend en argument un élément i de I et qui renvoie une expression de u_i.
- Pour les sommer, on dispose essentiellement de deux options :
  - Faire une boucle sur les éléments de I telle que, à chaque étape, on ajoute le terme suivant à la somme. Pour faire cela, à chaque étape (consistant à ajouter un terme), on remplace la somme déjà calculée par elle-même $+$ le nouveau terme

```
S=0
for i in I:
    S=S+u(i)
```

    Ne pas oublier d'initialiser la somme à 0 (une somme vide est nulle).
  - Créer une liste contenant les réels u_i, $i \in I$ et les sommer.

```
import numpy as np
S=np.sum([u(i) for i in I])
```

  Dans les deux cas, la variable `S` contient la somme que l'on cherchait à calculer.

On peut aussi stocker les termes que l'on veut sommer dans une liste. Dans ce cas on remplace tous les `u(i)` par des `u[i]` dans la suite.

Cette méthode algorithmique de calcul des sommes est parfois déstabilisante au début : en maths, une fois qu'un objet est introduit, il ne change plus de valeur. Ici c'est avant tout une histoire de mémoire informatique : en faisant `S=S+u(i)`, on oublie l'ancienne valeur de `S` puisqu'elle ne sert plus à rien.
Jamais d'indices en Python !

- Pour les multiplier, on dispose essentiellement de deux options :
  - Faire une boucle sur les éléments de I telle que, à chaque étape, on multiplie le produit par le terme suivant.

```
P=0
for i in I:
    P=P*u(i)
```

  - Créer une liste contenant les réels u_i, $i \in I$ et les multiplier.

```
import numpy as np
P=np.prod([u(i) for i in I])
```

  Dans les deux cas, la variable `P` contient le produit que l'on cherchait à calculer.

Ne pas oublier d'initialiser le produit à 1 (un produit vide vaut 1).

Exemples :

- *Pour calculer* $\sum_{i=0}^{20} i^2$ *:*

```

```

ou

- *Pour calculer* $\displaystyle\sum_{i=17}^{2023} \frac{i}{3^{1+i^2}}$ *:*

ou

Cette commande fonctionne même si on prend $n = 0$. En effet, dans ce cas, on fait le produit d'une liste vide et celui-ci vaut 1.

- *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $n! = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} k$ *donc pour calculer* $n!$ *:*

ou (mais cette commande donne des résultats aberrants pour les grosses valeurs de n*)*

On n'utilise surtout pas la formule avec les trois factorielles. On verra pourquoi en exercice.

- *Pour tous* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $p \in [\![0\,;n]\!]$,

.

Ainsi pour calculer $\dbinom{n}{p}$ *:*

ou

On peut même calculer des sommes doubles, qui ne sont rien d'autres que des sommes de sommes.

- *Pour calculer* $T_n = \displaystyle\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} ij$ *:*

ou encore (si on ne veut pas prendre la peine de réfléchir à comment couper en deux sommes) :