# Guide pratique du calcul de sommes

Dans la suite, $n, m, p, q$ désignent des entiers. Et $x$ et $y$ désignent des réels.

- La variable $i$ dans les sommes $\sum_{i=p}^{n} x_i$ ou $\sum_{i\in I} x_i$ est muette (on peut la remplacer par n'importe quelle variable non déjà introduite... le plus souvent $j$, $k$, $\ell$, $p$). Elle n'existe qu'à l'intérieur de la somme si bien que, entre autres :
  - Elle ne peut pas figurer dans le résultat final.
  - On ne doit surtout pas l'introduire avant (cela reviendrait à la fixer... or elle varie dans la somme).
- On commence par utiliser la linéarité pour se ramener à une *combinaison linéaire* de sommes usuelles (c'est-à-dire une somme de sommes usuelles, multipliées éventuellement par une constante) :

  *Par exemple*

$$\sum_{k=0}^{n}\left(5\left(\frac{3}{4}\right)^k+4k\right)=5\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{3}{4}\right)^k+4\sum_{k=0}^{n}k=5\,\frac{1-(3/4)^{n+1}}{1-3/4}+2n(n+1)=20\,\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right)+2n(n+1).$$

  On utilise des parenthèses pour éviter des ambiguïtés :

  *Par exemple* $\sum_{i=0}^{n} 2i+1$ *est elle égale à* $\left(\sum_{i=0}^{n} 2i\right)+1=n^2+n+1$ *ou à* $\sum_{i=0}^{n}(2i+1)=\sum_{i=0}^{n}2i+\sum_{i=0}^{n}1=(n+1)^2$ *?*
- On n'oublie pas que $1=x^0$ (pratique pour les sommes géométriques).
- **Toutes les sommes usuelles du cours commencent à** $0$**.** Qui sont-elles ?
  - La somme des entiers de $0$ à $n$ : $\sum_{k=0}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$.
  - Les sommes géométriques : si $\underline{x\neq 1}$, $\sum_{k=0}^{n} x^k=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$.
  - Le binôme de Newton : $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}=(x+y)^n$.

  Par ailleurs il est indispensable de savoir redémontrer, par récurrence, que

$$\sum_{k=0}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n} k^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

  (ces deux sommes ne sont pas exigibles mais très utiles donc les sujets de concours risquent de vous rappeler leurs valeurs et vous demander de les redémontrer).
- Lorsqu'on est en présence d'une somme usuelle qui ne commence pas par $0$, on ajoute (et on retranche forcément) les termes manquant puis utilise la relation de Chasles.

  *Par exemple* $\sum_{k=p}^{n} k^2=\sum_{k=p}^{n} k^2+\sum_{k=0}^{p-1} k^2-\sum_{k=0}^{p-1} k^2=\sum_{k=0}^{n} k^2-\sum_{k=0}^{p-1} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{(p-1)p(2p-1)}{6}$.

  Bien sûr on ne change pas une somme en ajoutant ou retranchant un terme nul. Ainsi

$$\sum_{k=1}^{n} k=\sum_{k=0}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2=\sum_{k=0}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3=\sum_{k=0}^{n} k^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

  En revanche $\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}=(x+y)^n-y^n$ et, si $x\neq 1$, $\sum_{k=1}^{n} x^k=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}-1$.
- Attention à toujours vérifier que $x$ est différent de $1$ avant d'appliquer la formule ci-dessus.

- On se rappelle que, si $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $p \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, alors $\sqrt[p]{x^k} = (\sqrt[p]{x})^k$ et $\dfrac{1}{x^k} = \left(\dfrac{1}{x}\right)^k$... pratique pour les sommes géométriques.
- Il y a $n-p+1$ termes dans la somme $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} x_k$ et non pas $n-p$.
- On ne reste pas bloqué devant une somme de termes ne dépendant pas de l'indice...
  *Par exemple* $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} 2 = \underbrace{2+\cdots+2}_{(n-p+1) \text{ fois}} = 2(n-p+1)$ *ou encore* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} n^3 = \underbrace{n^3+\cdots+n^3}_{n \text{ fois}} = n^4.$
- On ne reste pas non plus bloqué devant une somme présentant le terme $(-1)^{n+1}$ alors qu'on voudrait $(-1)^{n-1}$ (ou le contraire)... c'est la même chose. De même on pense à $(-1)^{n-2} = -(-1)^{n-1} = (-1)^n = \dfrac{1}{(-1)^n} = -(-1)^{n+1} = (-1)^{n+2}$, etc.
- La présence d'un $(-1)^n$ peut aussi (mais pas systématiquement) nous inciter à séparer la somme en la somme des termes d'indice pair et la somme des termes d'indice impair puis d'additionner les deux résultats.
- La méthode pour faire un changement d'indice est toujours la même :
  — On commencer par choisir le nouvel indice (généralement le choix s'impose de lui-même). Mais attention, on ne fait que des changements d'indice du type $k = i - q$, $k = i + q$ ou $k = q - i$ avec $q$ un entier fixé.
  *Surtout pas $k = 2i$ par exemple (car $i = k/2$ n'est plus nécessairement un entier).*
  — On exprime chaque indice par rapport à l'autre.
  *Par exemple, si on pose $k = n+1-i$, alors $i = n+1-k$.*
  — On remplace l'ancien indice par le nouveau partout dans la somme (et on ne surtout touche pas ce qui ne dépend pas de $i$ bien sûr... comme $n$ par exemple).
  — On change les bornes (dans le cas d'un renversement d'indice, on prend soin de mettre la plus petite borne en dessous de la somme et la plus grande au dessus).
  *Par exemple, avec le changement d'indices ci-dessus, si $i = 0$ alors $k = n+1$, et si $i = n$ alors $k = 1$. On écrit alors*
  $$\sum_{i=0}^{n}(n+1-i)^2 = \sum_{k=1}^{n+1} k^2 \qquad \textit{et non} \qquad \sum_{k=n+1}^{1} k^2.$$
- Quand on a tout essayé et qu'on a pas reconnu de sommes usuelles, on peut essayer de se ramener à une somme télescopique en écrivant le terme sommé comme la différence de termes d'indices successifs :
  $$\sum_{k=p}^{n}(u_{k+1}-u_k) = u_{n+1}-u_p, \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=p}^{n}(u_{k-1}-u_k) = u_{p-1}-u_n.$$
  *Par exemple, si $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1} = \dfrac{1}{k(k+1)}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,*
  $$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = 1-\frac{1}{n+1}.$$
- Si on n'a aucune idée, rien ne nous empêche d'écrire, au brouillon, la somme avec des pointillés pour mieux l'appréhender.
  *Par exemple* $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k k = \underbrace{-1+2}_{=1}\underbrace{-3+4}_{=1}\underbrace{-5+6}_{=1}+\ldots\underbrace{-(2n+1)+2n}_{=1}$ *et on peut conjecturer alors qu'elle est égale à $n$. Un raisonnement par récurrence nous permet alors de montrer que c'est bien le cas.*
- Lorsqu'on est face à une somme contenant un coefficient binomial, on cherche systématiquement à appliquer la formule du binôme de Newton.
  — Dans un premier temps, on utilise les formules sur les coefficients binomiaux de telle sorte qu'il n'y ait plus que le coefficient binomial et des termes du type $x^{q+i}$ ou $x^{q-i}$ (où $i$ est l'indice de la somme, $q$ un entier et $x$ un réel ne dépendant pas de $i$)
  *Par exemple, si $n \geqslant 3$,* $\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1} k\binom{n}{k}(-5)^{k-3} = \sum_{k=2}^{n-1} n\binom{n-1}{k-1}(-5)^{k-3} = n\sum_{k=2}^{n-1}\binom{n-1}{k-1}(-5)^{k-3}.$

— On effectue un changement d'indice pour que le terme dans la partie inférieure du coefficient binomial ne contienne plus que l'indice de la somme.

*Par exemple* $\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1}\binom{n-1}{k-1}(-5)^{k-3}=\sum_{i=1}^{n-2}\binom{n-1}{i}(-5)^{i-2}$, *via le changement d'indice* $i=k-1$.

— On met des termes en facteurs pour faire apparaitre un terme du type $x^iy^{n-i}$ (où $n$ est l'entier dans la partie supérieure du coefficient binomial et $i$ l'indice de la somme) sans oublier l'astuce suivante : $1=1^i=1^{n-i}$.

*Par exemple* $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-2}\binom{n-1}{i}(-5)^{i-2}=\frac{1}{25}\sum_{i=1}^{n-2}\binom{n-1}{i}(-5)^i1^{n-1-i}$.

— On utilise la relation de Chasles pour que la somme commence à $0$ et se termine au même entier que celui figurant dans partie supérieure du coefficient binomial.

*Par exemple* $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-2}\binom{n-1}{i}(-5)^i1^{n-1-i}=\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}(-5)^i1^{n-1-i}-1-(-5)^{n-1}$, *puisque* $\displaystyle\binom{n-1}{0}=\binom{n-1}{n-1}=1$.

— Enfin on applique la formule du binôme de Newton :

Par exemple $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}(-5)^i1^{n-1-i}=(-5+1)^{n-1}=(-4)^{n-1}$.

- Avant d'appliquer une formule, on vérifie qu'elle est valable pour tous les indices de la somme.

  *Par exemple, quel sens a la deuxième somme dans* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}n\binom{n-1}{k-1}$ *? Ici il suffit de faire démarrer la somme à* $1$ *(possible car le premier terme est nul) et le problème est réglé.*

  Plus généralement on peut utiliser la relation de Chasles lorsqu'une formule change selon l'indice de la somme :

  *Par exemple* $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}\min(k,n)=\sum_{k=0}^{n}\min(k,n)+\sum_{k=n+1}^{2n}\min(k,n)=\sum_{k=0}^{n}k+\sum_{k=n+1}^{2n}n=\frac{n(n+1)}{2}+n^2=\frac{n(3n+1)}{2}$.

- Lorsqu'on est face à un produit, on peut commencer par essayer de l'exprimer en fonction de factorielles. On garde en tête que $n!$ est une simple notation pour désigner le produit de tous les entiers de $1$ jusque $n$ (ou de $2$ jusque $n$, c'est la même chose n'est-ce pas ?). Quelques classiques :

$$\prod_{k=1}^{n}(2k)=2^nn!,\qquad \prod_{k=0}^{n}(2k+1)=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot\dots\cdot(2n)\cdot(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\dots\cdot 2n}=\frac{(2n+1)!}{2^nn!},\qquad \prod_{k=p}^{n}k=\frac{n!}{(p-1)!}$$

- On peut aussi tenter de repérer un produit télescopique. Mais généralement on se ramène à une somme en passant au logarithme, si tous les termes sont strictement positifs :

$$\ln\left(\prod_{k=p}^{n}x_k\right)=\sum_{k=p}^{n}\ln(x_k).$$

  Après le calcul, on repasse à l'exponentielle.

- Pour calculer une somme double on se ramène à la somme d'une somme simple puis on applique tout ce qui précède. Il y a toujours deux possibilités (de choix de l'ordre des sommes) mais parfois l'une des deux ne donne rien ou mène à calcul plus fastidieux. On retient :

$$\sum_{\substack{m\leqslant i\leqslant n\\ p\leqslant j\leqslant q}}=\sum_{i=m}^{n}\sum_{j=p}^{q}=\sum_{j=p}^{q}\sum_{i=m}^{n}\qquad \sum_{p\leqslant i\leqslant j\leqslant n}=\sum_{j=p}^{n}\sum_{i=p}^{j}=\sum_{i=p}^{n}\sum_{j=i}^{n}\qquad \sum_{p\leqslant i<j\leqslant n}=\sum_{j=p+1}^{n}\sum_{i=p}^{j-1}=\sum_{i=p}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}.$$

  Pour les sommes doubles sur domaine triangulaire, la première expression (somme pour $j$ de somme pour $i$) mène souvent à des calculs plus simples (surtout si $p=0$ ou $p=1$).

Moyen mnémotechnique pour retrouver la formule $\displaystyle\sum_{p\leqslant i<j\leqslant n} = \sum_{j=p+1}^{n}\sum_{i=p}^{j-1}$ (c'est analogue pour les autres) :

— Pour la somme extérieure, **qui ne peut surtout pas dépendre de $i$ (sinon c'est une erreur grave : $i$ ne peut pas exister en dehors de la somme intérieure puisque c'est son indice de sommation)**, on « efface $\leqslant i$ » et il reste $p < j \leqslant n$, i.e. $p+1 \leqslant j \leqslant n$. Ainsi $j$ va de $p+1$ à $n$.

— A $j$ fixé, on voit que $p \leqslant i < j$, i.e. $p \leqslant i \leqslant j-1$. Ainsi $i$ va de $p$ à $j-1$ dans la somme intérieure.

- Pour échanger l'ordre de deux sommes, il y a deux cas de figure :

  — ou bien les bornes de la somme à l'intérieur ne dépendent pas de l'indice de la somme à l'extérieur et alors on peut juste les échanger (cela revient à considérer une somme double sur un domaine rectangulaire).

  — ou bien les bornes de la somme à l'intérieur dépendent de l'indice de la somme à l'extérieur et on ne peut pas les échanger immédiatement (cela n'aurait aucun sens). On essaye de passer par une somme double sur un domaine triangulaire pour pouvoir les échanger.