**Chapitre 26**

# Espaces vectoriels de dimension finie

Dans ce chapitre, on se donne $E$ un espace vectoriel.

## I Le théorème de l'échange

### 1) Retour sur les familles libres et génératrices

En d'autres termes :
1. Si l'on rajoute un élément (ou plusieurs si on effectue cela plusieurs fois) à une famille génératrice, on obtient encore une famille génératrice.
2. Si un élément est CL des autres, il est « superflu », on peut le retirer et la famille engendre toujours le même espace.

**Lemme (G).** *Soit $\mathscr{G} = (x_1, \dots, x_n)$ une famille génératrice de $E$.*

1. *Si $y \in E$, alors $(x_1, \dots, x_n, y)$ est encore une famille génératrice de $E$.*
2. *Si $n \geqslant 2$ et si il existe $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $x_{i_0}$ est combinaison linéaire des autres vecteurs de $\mathscr{G}$, alors $\mathscr{G}$ privée de $x_{i_0}$ est toujours une une famille génératrice de $E$.*

Démonstration. On a montré dans le chapitre 18 qu'un sous-espace engendré était invariant par ajout d'un vecteur et invariant par retrait d'un vecteur combinaison linéaire des autres. □

En d'autres termes :
1. Si l'on enlève un élément (ou plusieurs si on effectue cela plusieurs fois) à une famille libre, on obtient encore une famille libre.
2. Si on ajoute à une famille libre un élément qui n'est pas CL des éléments de la famille, alors elle reste libre.

**Lemme (L).** *Soit $\mathscr{L} = (x_1, \dots, x_n)$ une famille libre de $E$.*

1. *Si $n \geqslant 2$ et si on retire un vecteur à la famille $\mathscr{L}$, alors il s'agit toujours d'une famille libre.*
2. *Si $y \notin \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$, alors $(x_1, \dots, x_n, y)$ est une famille libre de $E$.*

Démonstration.
1. Montré dans le chapitre 18.
2. Soit $(\mu_1, \dots, \mu_n, \mu_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $0 = \mu_1 x_1 + \cdots + \mu_n x_n + \mu_{n+1} y$.

   Si $\mu_{n+1} \neq 0$, alors $y = -\dfrac{1}{\mu_{n+1}} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \left(-\dfrac{\mu_i}{\mu_{n+1}}\right) x_i$ et donc $y \in \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$. C'est exclu. On a donc $\mu_{n+1} = 0$ et donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i = 0$.

   La liberté de la famille $(x_1, \dots, x_n)$ implique alors que $\mu_1 = \cdots = \mu_n = 0$. Ainsi $(x_1, \dots, x_n, y)$ est encore une famille libre de $E$.

□

### 2) Le théorème de l'échange

**Théorème (théorème de l'échange).** *Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $E$ un espace vectoriel. Soient $\mathscr{L} = (x_1, \dots, x_p)$ une famille libre de $E$ et $\mathscr{G} = (y_1, \dots, y_n)$ une famille génératrice de $E$. Alors $p \leqslant n$ et on peut remplacer $p$ des vecteurs de la famille $\mathscr{G}$ par les $p$ vecteurs de la famille $\mathscr{L}$ pour obtenir une nouvelle famille génératrice de $E$.*

Démonstration.

Supposons maintenant que l'on ait continué ce processus : soit $k \in \mathbb{N}^*$ est tel que $k \leqslant \min(p-1, n-1)$. Supposons que l'on ait remplacé $y_1, \dots, y_k$ par $x_1, \dots, x_k$ de telle sorte que $(x_1, \dots, x_k, y_{k+1}, \dots, y_n)$ soit une famille génératrice de $E$ (en ayant éventuellement permuté des vecteurs). Il existe alors $(\mu_1, \dots, \mu_n)$ tels que

$$x_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} \mu_i x_i + \sum_{j=k+1}^{n} \mu_j y_j.$$

De plus $(\mu_{k+1}, \dots, \mu_n) \neq (0, \dots, 0)$ car sinon $x_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} \mu_i x_i \in \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_k)$ donc la famille $(x_1, \dots, x_k, x_{k+1})$ serait liée et donc $\mathscr{L}$ serait liée. Par conséquent, quitte à permuter $y_{k+1}, \dots, y_n$ (et donc $\mu_{k+1}, \dots, \mu_n$), on peut se ramener à $\mu_{k+1} \neq 0$. On a

$$x_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \mu_i x_i - \sum_{j=k+2}^{n} \mu_j y_j = \mu_{k+1} y_{k+1}$$

et donc

$$y_{k+1} = \frac{1}{\mu_{k+1}} \left( x_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \mu_i x_i - \sum_{j=k+2}^{n} \mu_j y_j \right) \in \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_{k+1}, y_{k+2}, \dots, y_n).$$

Or $(x_1, \dots, x_{k+1}, y_{k+1}, y_{k+2}, \dots, y_n)$ engendre $E$ (d'après le point 1 du lemme G) donc $(x_1, \dots, x_{k+1}, y_{k+2}, \dots, y_n)$ engendre $E$ (d'après le point 2 du lemme G). On a bien remplacé $k+1$ vecteurs de $\mathscr{G}$ par $x_1, \dots, x_{k+1}$.

• Si $p > n$, alors on répète ce processus $n$ fois et on obtient que $(x_1, \dots, x_n)$ engendre $E$. Mais alors $x_{n+1} \in E = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ et donc $\mathscr{L}$ est liée, ce qui est absurde. On a donc $p \leqslant n$ et, on répétant $p$ fois ce processus, on a bien remplacé $p$ des vecteurs de la famille $\mathscr{G}$ avec les $p$ vecteurs de la famille $\mathscr{L}$ pour obtenir une nouvelle famille génératrice de $E$. □

**Proposition.** *Si $E$ est un espace vectoriel engendré par $n$ vecteurs alors toute famille formée d'au moins $n+1$ vecteurs est liée.*

DÉMONSTRATION. Supposons que $E$ admette une famille génératrice $\mathscr{G}$ composée de $n$ vecteurs. Si $\mathscr{L}$ est une famille libre, alors le théorème de l'échange entraîne qu'elle contient $p \leqslant n$ vecteurs. Par contraposée, si une famille contient au moins $n+1$ vecteurs, alors elle est forcément liée. □

***Exemple :***

# II Espace vectoriel de dimension finie

## 1) Définition et premiers exemples

L'espace vectoriel $E = \{0\}$ est de dimension finie (il est engendré par $\varnothing$).

**Définition (espace vectoriel de dimension finie).** *On dit que $E$ est de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie. Si ce n'est pas le cas, on dit que $E$ est de dimension infinie.*

***Exemples :***

- *Nous avons vu dans le chapitre introductif que chacun des espaces vectoriels $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_n[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ (avec $n$ et $p$ dans $\mathbb{N}^*$) admet une famille génératrice finie (leurs bases canoniques respectives). Il s'agit donc d'espaces vectoriels de dimension finie.*
- *En revanche $\mathbb{R}[X]$ est de dimension infinie. En effet, raisonnons par l'absurde : supposons que $\mathbb{R}[X]$ admette une famille génératrice finie $(P_1, \dots, P_n)$. Notons $d = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \left(\deg(P_i)\right)$. Il existe alors $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que*

$$X^{d+1} = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n.$$

  *On a donc $X^{d+1} \notin \mathbb{R}_d[X]$, ce qui est absurde.*

$\mathbb{R}[X]$ est l'exemple le plus simple d'espace de dimension infinie : y penser quand on demande un contre-exemple en dimension infinie !

**Proposition.** *Si, pour tout $n \geqslant 1$, $E$ admet une famille libre à $n$ éléments, alors $E$ est de dimension infinie.*

Démonstration. Si $E$ est de dimension finie, il admet une famille génératrice finie. Si $n$ désigne le cardinal de cette famille génératrice, alors $E$ n'admet pas de famille libre à $n+1$ éléments, ce qui est absurde. $\square$

Un espace vectoriel est donc de dimension infinie quand il admet des familles libres de cardinal arbitrairement grand. La réciproque est vraie : si $E$ est de dimension infinie, alors, pour tout $n \geqslant 1$, $E$ admet une famille libre de cardinal $n$. Montrons-le par récurrence : supposons $E$ de dimension infinie. L'initialisation est triviale. Pour l'hérédité : soit $n \geqslant 1$ et supposons que $E$ contienne une famille libre $x_1, \dots, x_n$ à $n$ éléments. $E \neq \operatorname{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ (car sinon, $E$ est de dimension finie car admet une famille génératrice finie). Soit $x \notin \operatorname{Vect}(x_1, \dots, x_n)$. La famille à $n+1$ éléments $(x_1, \dots, x_n, x)$ est libre d'après les préliminaires, ce qui clôt la récurrence.

***Exemples :***

- *$\mathbb{R}^\mathbb{R}$ est de dimension infinie car (cf. chapitre 20), pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les fonctions $x \longmapsto e^x, \dots, x \longmapsto e^{nx}$ forment une famille libre. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ admet une famille libre à $n$ éléments donc est de dimension infinie.*
- *Ces fonctions appartenant également (entre autres) à $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $D(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\dots$, $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Tous ces espaces contiennent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une famille libre à $n+1$ éléments donc sont de dimension infinie.*
- *Montrons que $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ est également de dimension infinie. Si $k \in \mathbb{N}$, on définit la suite $\left({u_n}^{(k)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général ${u_n}^{(k)} = 0$ si $n \neq k$ et $1$ si $n = k$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, les suites $\left({u_n}^{(0)}\right)_{n \in \mathbb{N}}, \left({u_n}^{(1)}\right)_{n \in \mathbb{N}}, \dots, \left({u_n}^{(p)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ forment une famille libre à $p+1$ éléments (car aucune n'est combinaison linéaire des autres), ce qui permet de conclure.*

## 2) Existence de bases en dimension finie

Par abus de langage, si $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille de vecteurs de $E$, on l'assimilera parfois à la partie de $E$ : $\{x_1; \dots; x_n\}$. Ainsi, on s'autorisera à parler d'appartenance, d'inclusion, d'union et d'intersection de familles.

Si $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille libre (respectivement génératrice), on dit que $\{x_1; \dots; x_n\}$ est une partie libre (respectivement génératrice). Ainsi, dans la suite, on confondra familles libres et parties libres.

**Théorème (existence de bases en dimension finie).** *Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie. Soient $\mathscr{G}$ une famille génératrice finie de $E$ et $\mathscr{L}$ une famille libre de $E$ telle que $\mathscr{L} \subset \mathscr{G}$. Alors il existe une base $\mathscr{B}$ (nécessairement finie) telle que $\mathscr{L} \subset \mathscr{B} \subset \mathscr{G}$. En particulier, tout espace vectoriel de dimension finie admet au moins une base.*

DÉMONSTRATION.

□

En d'autres termes, $A$ est l'ensemble de tous les cardinaux des familles libres de $E$ contenant $\mathscr{L}$ et contenues dans $\mathscr{G}$. En particulier, $A$ est une partie de $\mathbb{N}$.

Voici quelques conséquences immédiates de ce théorème :

**Théorème (théorème de la base incomplète).** *Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie. Alors toute famille libre de $E$ peut être complétée en base de $E$ (par des vecteurs d'une famille génératrice quelconque).*

La différence avec le théorème d'existence des bases est qu'on ne suppose plus que $\mathscr{L}$ est incluse dans $\mathscr{G}$.

DÉMONSTRATION.

□

**Théorème (théorème de la base extraite).** *Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie. Alors de toute famille génératrice de $E$ on peut extraire une base de $E$.*

DÉMONSTRATION.

□

## 3) Dimension d'un espace vectoriel

Intuitivement, la dimension d'un espace vectoriel est le nombre de degrés de liberté dont on dispose pour construire un élément de cet espace, ou le nombre d'informations juste nécessaires pour construire les éléments de cet espace. Attention, ceci n'est pas la définition, mais cela permet de deviner le résultat, avant de le prouver rigoureusement.

**Proposition/Définition (dimension d'un espace vectoriel).** *Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie. Toutes les bases de $E$ admettent le même nombre de vecteurs. Ce nombre est appelé la dimension de $E$ et noté $\dim(E)$.*

Démonstration.

□

**Proposition.** *Soit $E$ est un espace vectoriel de dimension finie. On a $\dim(E) = 0$ si et seulement si $E = \{0\}$.*

Démonstration.

**Proposition.** *Soient $n$ et $p$ dans $\mathbb{N}^*$. On a*

$$\dim(\mathbb{R}^n) = n, \qquad \dim(\mathbb{R}_n[X]) = n + 1, \qquad \textit{et} \qquad \dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})) = np.$$

Cela se voit très bien si on considère la dimension comme le nombre de degrés de liberté. En effet :
- Un élément de $\mathbb{R}^n$ est un vecteur à $n$ coordonnées.
- Une matrice de taille $n \times p$ est un tableau avec $n$ lignes et $p$ colonnes donc a $n \times p$ coefficients. En particulier, une matrice carrée de taille $n$ a $n^2$ coefficients.
- Un polynôme de degré inférieur ou égal à $n$ a $n+1$ coefficients : du coefficient constant jusqu'au coefficient de $X^n$.

Démonstration. Dans le chapitre 20, nous avons décrit les bases canoniques des espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_n[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ qui contiennent respectivement $n$, $n+1$ et $np$ vecteurs. □

## 4) Familles libres et génératrices en dimension finie

**Proposition.** *Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Alors*

1. *Toute famille génératrice de $E$ possède au moins $n$ vecteurs.*
2. *Toute famille libre de $E$ possède au plus $n$ vecteurs.*
3. *Si $\mathcal{F}$ est une famille de $p \in \mathbb{N}^*$ vecteurs de $E$, alors*

$$\mathcal{F} \text{ est une base} \iff \begin{array}{l}\mathcal{F} \text{ est libre} \\ \text{et} \quad p = n\end{array} \iff \begin{array}{l}\mathcal{F} \text{ est génératrice} \\ \text{et} \quad p = n\end{array}.$$

Démonstration. Soit $\mathscr{B}$ une base de $E$ (elle contient $n$ vecteurs par définition). Soit $\mathcal{F}$ est une famille de $p \in \mathbb{N}^*$ vecteurs de $E$.

Montrer qu'une famille est génératrice est en général plus difficile que de montrer qu'une famille est libre. Le résultat précédent permet de s'affranchir de cette étape quand on veut prouver qu'une famille est une base, à la condition qu'il y ait le bon nombre d'éléments : il suffit de montrer que la famille est libre, si le cardinal de la famille est égal à la dimension (qu'il faut donc connaître), la famille est une base.

$\square$

**Remarques :**

- Ce dernier résultat est très important en pratique : si on sait qu'un espace vectoriel est de dimension $n$, alors il suffit de trouver une famille libre à $n$ éléments ou une famille génératrice à $n$ éléments pour trouver une base.
- Si on sait qu'un espace vectoriel $E$ est de dimension $n \geqslant 2$, alors le théorème de la base incomplète se reformule ainsi : si $\mathscr{L} = (e_1, \dots, e_k)$ est une famille libre de $E$ contenant $k \in [\![1, n-1]\!]$ vecteurs, alors il existe $n-k$ vecteurs $e_{k+1}, \dots, e_n$ (que l'on peut choisir dans une famille génératrice quelconque) tels que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de $E$.

***Exemples :***

Raisonnement très classique !

**Remarque :** Plus généralement, donnons-nous $n \in \mathbb{N}^*$ et $(P_0, \dots, P_n)$ une famille de polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ tels que $\deg(P_k) = k$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. Il s'agit alors d'une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

En particulier il s'agit d'une famille génératrice : tout polynôme de degré au plus $n$ s'écrit comme combinaison linéaire de $P_0, \dots, P_n$.

## 5) Application aux suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Donnons-nous $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^*$. Notons $E_{a,b}$ l'ensemble des suites récurrentes linéaires d'ordre 2 à coefficients constants, i.e. l'ensemble des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n$$

**Théorème.** *$E_{a,b}$ est un espace vectoriel de dimension 2.*

Démonstration. Montrons tout d'abord que $E_{a,b}$ est un espace vectoriel.

- La suite nulle est un élément de $E_{a,b}$ donc $E_{a,b}$ est non vide.
- Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux éléments de $E_{a,b}$ et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$. Soit $n\in\mathbb{N}$. On a $u_{n+2}=au_{n+1}+bu_n$ et $v_{n+2}=av_{n+2}+bv_n$, si bien que

$$\lambda u_{n+2}+\mu v_{n+2}=a(\lambda u_{n+2}+\mu v_{n+1})+b(\lambda u_n+\mu v_n)$$

c'est-à-dire que $(\lambda u_n+\mu v_n)_{n\in\mathbb{N}}\in E_{a,b}$ : $E_{a,b}$ est stable par combinaison linéaire.

Il est intuitif que $\dim E_{a,b}=2$ si l'on considère la dimension comme le nombre de degrés de liberté : en effet, un élément de $E_{a,b}$ est entièrement déterminé par $u_0$ et $u_1$ !

Ainsi $E_{a,b}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qui est un espace vectoriel de référence. En particulier, c'est un espace vectoriel. Montrons à présent qu'il est de dimension 2. Pour cela introduisons les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $E_{a,b}$ telles que $x_0=y_1=1$ et $x_1=y_0=0$ et montrons que $\big((x_n)_{n\in\mathbb{N}},(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$ est une base de $E_{a,b}$

- Soit $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\lambda(x_n)_{n\in\mathbb{N}}+\mu(y_n)_{n\in\mathbb{N}}=(0)_{n\in\mathbb{N}}$.
Évaluons au rang $n=0$ : $\lambda x_0+\mu y_0=0$ donc $\lambda=0$.
Évaluons au rang $n=1$ : $\lambda x_1+\mu y_1=0$ donc $\mu=0$.
Ainsi la famille $\big((x_n)_{n\in\mathbb{N}},(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$ est libre.
- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in E_{a,b}$. Montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}=u_0(x_n)_{n\in\mathbb{N}}+u_1(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour cela, montrons par récurrence double que

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad u_n=u_0x_n+u_1y_n.$$

C'est immédiat aux rangs 0 et 1. Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons que la propriété soit vraie au rangs $n$ et $n+1$. On a alors

$$\begin{aligned}u_{n+2}=au_{n+1}+bu_n&=a(u_0x_{n+1}+u_1y_{n+1})+b(u_0x_n+u_1y_n)\\&=u_0(ax_{n+1}+bx_n)+u_1(ay_{n+1}+by_n)\\&=u_0x_{n+2}+u_1y_{n+2}.\end{aligned}$$

Ainsi la propriété est vraie au rang $n+2$. Par récurrence, nous en déduisons la propriété est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$. Ainsi la famille $\big((x_n)_{n\in\mathbb{N}},(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$ est génératrice.

Cette base contient deux éléments donc $\dim(E_{a,b})=2$. □

On cherche à présent une base de $E_{a,b}$. On va essayer de trouver une base de suites « simples ». On cherche donc les suites géométriques dans $E_{a,b}$.

Les suites les plus simples sont les suites constantes ou arithmétiques, mais (sauf cas particulier) $E_{a,b}$ ne contient aucune suite constante ou arithmétique non nulle. On cherche donc des suites un peu moins simples : des suites géométriques.

**Proposition.** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $r\neq 0$ de premier terme $u_0\neq 0$. Alors :*

$$(u_n)\in E_{a,b}\qquad\iff\qquad r^2=ar+b.$$

Démonstration. On a $(u_n)\in E_{a,b}$ si et seulement, si pour tout $n\in\mathbb{N}$, $r^{n+2}u_0=ar^{n+1}u_0+br^nu_0$ si et seulement si $r^2=ar+b$ (on a simplifié par $r^nu_0\neq 0$).□

L'équation $r^2=ar+b$ est appelée équation caractéristique des suites de $E_{a,b}$. Son discriminant est $\Delta=a^2+4b$.

On trouve $\lambda_1$ et $\lambda_2$ grâce aux valeurs de $u_0$ et $u_1$ : voir les exemples dans le chapitre 7.

**Théorème.**

1. *Si l'équation $r^2=ar+b$ admet deux racines distinctes $r_1$ et $r_2$ (c'est-à-dire si $\Delta>0$) alors les deux suites $({r_1}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $({r_2}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une base de $E_{a,b}$. En particulier, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in E_{a,b}$ :*

$$\exists!(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2,\qquad\forall n\in\mathbb{N},\qquad u_n=\lambda_1\times{r_1}^n+\lambda_2\times{r_2}^n.$$

Le cas $\Delta < 0$ n'est pas au programme.

2. *Si l'équation $r^2 = ar + b$ admet une racine double $r_0$ (c'est-à-dire si $\Delta = 0$) alors les deux suites $({r_0}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(n \times {r_0}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une base de $E_{a,b}$. En particulier, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_{a,b}$ :*

$$\exists!(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = (\lambda_1 + n \times \lambda_2) \times {r_0}^n.$$

$0$ n'est pas solution de $r^2 = ar + b$ puisque $b \neq 0$, et donc $r_1$ et $r_2$ sont non nulles.

Démonstration.

1.

2. La suite $({r_0}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $E_{a,b}$. Montrons que $(n \times {r_0}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $E_{a,b}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}(n+2){r_0}^{n+2} &= (n+2){r_0}^n \times {r_0}^2 \\ &= (n+1+1){r_0}^n \times (ar_0 + b) \\ &= (n+1){r_0}^n \times ar_0 + {r_0}^n \times ar_0 + n{r_0}^n b + 2{r_0}^n b \\ &= a(n+1){r_0}^n r_0 + bn{r_0}^n + 2{r_0}^n \times (ar_0 + 2b).\end{aligned}$$

Or, $r_0$ est une solution double de $r^2 - ar - b = 0$ donc, d'une part, $\Delta = a^2 + 4b = 0$ et d'autre part, $r_0 = a/2$ donc $a = 2r_0$. Ainsi

$$\Delta = a \times (2r_0) + 4b = 2(ar_0 + 2b)$$

si bien que $ar_0 + 2b = 0$ (rappelons que $\Delta = 0$). Finalement, on obtient $(n+2){r_0}^{n+2} = a(n+1){r_0}^{n+1} + bn{r_0}^n$ c'est-à-dire que $(n \times {r_0}^n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_{a,b}$ et on conclut de la même manière. □

# III Sous-espaces vectoriels et dimension

## 1) Dimension d'un sous-espace vectoriel

Cette proposition est totalement intuitive. La dimension est une manière de quantifier la notion de « taille » d'un espace vectoriel. Si un espace vectoriel est inclus dans un autre, il a une « taille » plus petite, et ils ont la même « taille » si et seulement s'ils sont égaux (encore une fois, si l'un est inclus dans l'autre).

**Proposition.** *Soit $F$ un sous-espace vectoriel de $E$. Si $E$ est de dimension finie, alors $F$ est de dimension finie et $\dim(F) \leqslant \dim(E)$, avec égalité si et seulement si $F = E$.*

Démonstration. Si $F = \{0\}$ alors $F$ est de dimension finie et $\dim(F) \leqslant \dim(E)$. Supposons à présent que $F \neq \{0\}$. Considérons $C = \{\text{card}(\mathscr{L}) \,|\, \mathscr{L} \text{ famille libre de } F\}$.

- $F \neq \{0\}$ donc il existe $x \in F$ non nul. La famille $(x)$ est libre à un élément de $F$ donc $1 \in C$ : $C$ est non vide.
- Si $\mathscr{L}$ est une famille libre de $F$ alors $\mathscr{L}$ est une famille libre de $E$ donc $\text{card}(\mathscr{L}) \leqslant \dim(E)$ : $C$ est majorée par $\dim(E)$.

Ainsi $C$ est une partie non vide majorée de $\mathbb{N}$ donc admet un plus grand élément $n_0$. Soit $\mathscr{B}$ une famille libre de $F$ de cardinal $n_0$. De même que dans le théorème d'existence des bases (cf. II.2), $\mathscr{B}$ est une base de $F$ donc $F$ admet une base donc une famille génératrice finie. Le sous espace vectoriel $F$ est donc de dimension finie et $\dim(F) = n_0 \leqslant \dim(E)$.

Examinons à présent le cas d'égalité. Si $\dim(E) = \dim(F)$, alors $\mathscr{B}$ est une famille libre de $E$ de cardinal $n_0 = \dim(F) = \dim(E)$ donc est une base de $E$. En particulier, $\text{Vect}(\mathscr{B}) = E$. Or, $\mathscr{B}$ est une base de $F$ donc $\text{Vect}(\mathscr{B}) = F$ donc $E = F$. La réciproque est évidente. □

**Corollaire.** *Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie et soient $F$ et $G$ deux sous-espace vectoriel de $E$. Alors $F = G$ si et seulement si $F \subset G$ et $\dim(F) = \dim(G)$.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème précédent avec $E = G$ puisque $F$ est alors un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $G$. □

Soit $F$ un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel $E$ de dimension finie.

On peut alors définir les notions de droites et de plans :

**Définition.** *Soit $E$ un espace vectoriel.*

- *On appelle droite (vectorielle) de $E$ tout sous-espace vectoriel $D$ de $E$ de dimension $1$, c'est-à-dire tel qu'il existe $x \in D$ non nul tel que $D = \mathrm{Vect}(x) = \{\lambda x \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.*
- *Si $n \geqslant 2$, on appelle plan (vectoriel) de $E$ tout sous-espace $P$ de $E$ de dimension $2$, c'est-à-dire tel qu'il existe $x$ et $y$ non colinéaires dans $P$ tels que $P = \mathrm{Vect}(x, y) = \{\lambda x + \mu y \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.*

## 2) Somme de sous-espaces vectoriels en dimension finie

On rappelle que, si $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$ admettant des bases $\mathscr{B}_F$ et $\mathscr{B}_G$, alors $F$ et $G$ sont supplémentaires si et seulement si la concaténation de $\mathscr{B}_F$ et $\mathscr{B}_G$ est une base de $E$. En comptant le nombre des vecteurs dans les bases, on obtient :

**Théorème.** *Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$. Si $F$ et $G$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $E$, alors $\dim(G) = \dim(E) - \dim(F)$.*

Il n'y a pas unicité du supplémentaire de $F$ mais on sait qu'il est nécessairement de dimension $n - \dim(F)$.

**Théorème (existence de supplémentaires en dimension finie).** *Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$. Tout sous-espace vectoriel $F$ de $E$ admet un supplémentaire dans $E$, c'est-à-dire, il existe un sous-espace vectoriel de $G$ de $E$ tel que $E = F \oplus G$.*

Démonstration.

$\square$

Par récurrence, on obtient le théorème suivant :

**Théorème.** *Soient $F_1, \dots, F_p$ des sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel $E$ de dimension finie vérifiant $F_1 \oplus \cdots \oplus F_p = E$. On a*

$$\dim(E) = \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i).$$

*De plus, si on dispose d'une base $\mathscr{B}_i$ de chacun des $F_i$, $i \in [\![1, n]\!]$, alors la concaténation de ces $p$ bases est une base de $E$. On dit qu'il s'agit d'une base adaptée à la décomposition $F_1 \oplus \cdots \oplus F_p = E$.*

Nous sommes à présent en mesure de prouver le résultat admis dans le paragraphe I.1 du chapitre 25, à savoir que si $F_1$ et $F_2$ sont deux plans vectoriels distincts dans $\mathbb{R}^3$, alors $F_1 + F_2 = \mathbb{R}^3$. Puisque $F_1$ et $F_2$ sont distincts, alors $F_1 \cap F_2 \subsetneq F_1$ et donc $\dim(F_1 \cap F_2) < 2$ i.e. $\dim(F_1 \cap F_2) \leqslant 1$. D'après la formule de Grassmann,

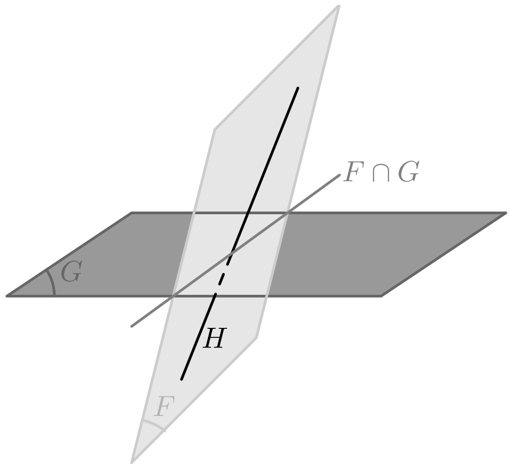
$$\dim(F_1 + F_2) \geqslant 2 + 2 - 1 = 3.$$

Or, $F_1 + F_2$ est inclus dans $\mathbb{R}^3$ donc $\dim(F_1 + F_2) = 3$, si bien que $F_1 + F_2 = \mathbb{R}^3$.

**Théorème (formule de Grassmann).** *Soit $E$ un espace vectoriel. Soient $F$ et $G$ deux sous-espace vectoriel de dimension finie de $E$. Alors le sous-espace vectoriel $F + G$ est de dimension finie et*

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

Démonstration.




En effet :

1. Soit $x \in H \cap G$. Comme $H \subset G$, on a $x \in F \cap G$. Comme $x \in H$, on a alors $x \in H \cap (F \cap G) = \{0\}$ (puisque $F = H \oplus (F \cap G)$) et donc $x = 0$. Par conséquent on a $H \cap F = \{0\}$.
2. $H \subset F$ donc $H + G \subset F + G$.
3. Si $x \in F + G$, il existe $(y, z) \in F \times G$ tel que $x = y + z$. Comme $F = H \oplus (F \cap G)$, il existe $y_1 \in H$ et $y_2 \in F \cap G$ tel que $y = y_1 + y_2$. On a donc $x = \underbrace{y_1}_{\in H} + \underbrace{y_2 + z}_{\in G}$.

   Ainsi $F + G \subset H + G$ et donc $F + G = H + G$.

On a $F + G = H + G$ mais on ne peut absolument pas en déduire que $F = G$ !

Comme $F + G = H \oplus G$ et $F = H \oplus (F \cap G)$ , on obtient que

$$\dim(F + G) = \dim(H \oplus G) = \dim(H) + \dim(G)$$

et $\dim(H) = \dim(F) - \dim(F \cap G)$. D'où la formule de Grassmann. $\square$

Le point 2 est le critère que l'on utilise le plus souvent pour montrer que $E = F \oplus G$.

**Théorème.** *Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie. Soient $F$ et $G$ deux sous-espace vectoriel de $E$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. $E = F \oplus G$,
2. $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$ *et* $F \cap G = \{0\}$,
3. $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$ *et* $F + G = E$.

Démonstration.

□

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension $n = \dim(E) \geqslant 2$. Les résultats précédents nous fournissent une méthode pour trouver un supplémentaire d'un sous-espace vectoriel $F$ de $E$ :

- On cherche une base $(e_1, \ldots, e_p)$ de $F$. On sait alors que $\dim(F) = p$ et qu'un supplémentaire de $F$ (il en existe forcément au moins un) dans $E$ sera de dimension $n - p$.
- On recherche alors $n - p$ vecteurs $e_{p+1}, \ldots e_n$ de $E$ qui complètent $(e_1, \ldots, e_p)$ en une base de $E$. On s'aide souvent de bases canoniques.
- On en déduit que $G = \mathrm{Vect}(e_{p+1}, \ldots e_n)$ est un supplémentaire de $F$ dans $E$ par théorème de concaténation des bases.

***Exemple :*** *On cherche un supplémentaire de $F = \{P \in \mathbb{R}_4[X] \,|\, P(1) = P'(1) = 0\}$ dans $\mathbb{R}_4[X]$.*

**Corollaire.** *Soit $E$ un espace vectoriel. Soit $p \geqslant 2$. Soient $F_1, \dots, F_p$ des sous-espace vectoriel de dimension finie de $E$. Alors $F_1 + \dots + F_p$ est de dimension finie et*

$$\dim(F_1 + \dots + F_p) \leqslant \dim(F_1) + \dots + \dim(F_p),$$

*avec égalité si et seulement si les sous-espace vectoriel $F_1, \dots, F_p$ sont en somme directe.*

DÉMONSTRATION. Procédons par récurrence.

- Si $F_1$ et $F_2$ sont des sous-espace vectoriel de dimension finie, alors la formule de Grassmann entraîne que

$$\dim(F_1 + F_2) = \dim(F_1) + \dim(F_2) - \dim(F_1 \cap F_2) \leqslant \dim(F_1) + \dim(F_2).$$

  De plus il y a égalité si et seulement si $\dim(F_1 \cap F_2) = 0$, i.e. $F_1 \cap F_2 = \{0\}$ si et seulement si la somme est directe.
- Soit $p \geqslant 1$. Supposons le résultat vrai au rang $p$, c'est-à-dire $G_p = F_1 + \dots + F_p$ est de dimension finie et

$$\dim(F_1 + \dots + F_p) \leqslant \dim(F_1) + \dots + \dim(F_p),$$

  avec égalité si et seulement si les sous-espace vectoriel $F_1, \dots, F_p$ sont en somme directe.
  Donnons-nous $F_{p+1}$ un autre sous-espace vectoriel de dimension finie de $E$. La formule de Grassmann entraîne que $F_1 + \dots + F_{p+1} = G_p + F_{p+1}$ est de dimension finie et que

$$\begin{aligned}\dim(F_1 + \dots + F_{p+1}) &= \dim(G_p + F_{p+1}) \\ &= \dim(G_p) + \dim(F_{p+1}) - \dim(G_p \cap F_{p+1}) \\ &\leqslant \dim(G_p) + \dim(F_{p+1}) \\ &\leqslant \dim(F_1) + \dots + \dim(F_p) + \dim(F_{p+1})\end{aligned}$$

  (où on a appliqué l'hypothèse de récurrence à la dernière inégalité). Ensuite, si $\dim(F_1 + \dots + F_{p+1})$ est égale à $\dim(F_1) + \dots + \dim(F_p) + \dim(F_{p+1})$, alors toutes les inégalités précédentes sont des égalités. En particulier :
  - $\dim(G_p \cap F_{p+1}) = 0$ donc $G_p \cap F_{p+1} = \{0\}$ et donc $G_p + F_{p+1} = G_p \oplus F_{p+1}$.
  - $\dim(G_p) = \dim(F_1) + \dots + \dim(F_p)$ et donc, par hypothèse de récurrence, $G_p = F_1 \oplus \dots \oplus F_p$.

  Ainsi $F_1, \dots, F_{p+1}$ sont en somme directe.

D'où le corollaire par récurrence. □

## 3) Rang d'une famille de vecteurs

**Définition (rang d'une famille de vecteurs).** *Soit $(x_1, \dots, x_p)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel $E$. On appelle rang de cette famille, et on note $\mathrm{rg}(x_1, \dots, x_p)$, la dimension du sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_p)$.*

Le sous espace vectoriel $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_p)$ est bien de dimension finie puisqu'il est engendré par la famille $(x_1, \dots, x_p)$ qui contient un nombre fini de vecteurs.

**Proposition.** *Soit $(x_1,\dots,x_p)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel $E$. Notons $r$ son rang. Nous avons :*

1. *$r \leqslant p$ avec égalité si et seulement si la famille est libre.*

*Si de plus $E$ est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, alors*

2. *$r \leqslant n$ avec égalité si et seulement si la famille engendre $E$.*
3. *$r = n = p$ si et seulement si la famille est une base de $E$.*

Démonstration.

□

**Remarque :** Soient $E$ un espace vectoriel de dimension finie et $(x_1,\dots,x_p)$ une famille de vecteurs de $E$. On retiendra notamment que

On a vu dans le chapitre 20 que, si on effectue une opérations élémentaire sur une famille de vecteurs (échanger deux vecteurs, multiplier l'un des vecteurs par un scalaire non nul ou ajouter à l'un des vecteurs un autre vecteur de la famille multiplié par un scalaire), alors le sous-espace qu'elle engendre est inchangé. Nous en déduisons la proposition ci-contre.

**Proposition.** *Soit $(x_1,\dots,x_p)$ une famille de vecteurs de $E$. Soient $k \in [\![1,p]\!]$ et $(y_1,\dots,y_k)$ une famille obtenue en appliquant une succession finie d'opérations élémentaires sur $(x_1,\dots,x_p)$ et en enlevant des vecteurs nuls ou qui sont des combinaisons linéaires des autres. Alors*

$$\mathrm{rg}(y_1,\dots,y_k) = \mathrm{rg}(x_1,\dots,x_p).$$

**Corollaire.** *Le rang d'une famille finie de vecteurs est le maximum des cardinaux de ses sous familles libres.*

Dans la pratique, pour trouver le rang d'une famille, on enlève des vecteurs nuls ou qui sont des combinaisons linéaires des autres (en s'aidant éventuellement d'opérations élémentaires) jusqu'à ce qu'on obtienne une famille libre.

Nous verrons dans le prochain chapitre le rang d'une matrice et le lien avec la notion de rang d'une famille de vecteurs. Notamment nous verrons une méthode pour déterminer le rang d'une famille de vecteurs (avec la méthode du pivot de Gauss).

***Exemple :*** *Donnons-nous $x_1 = (1,2,-1)$, $x_2 = (4,5,5)$, $x_3 = (2,1,7)$, $x_4 = (7,8,11)$ des vecteurs $\mathbb{R}^3$.*

# IV Applications linéaires en dimension finie

## 1) Image d'une famille de vecteurs par une application linéaire

Reformulons le théorème montré dans le chapitre 21 :

**Théorème (caractérisation par l'image d'une base).** *Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie $n$ et soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de $E$. Donnons-nous $(v_1, \dots, v_n)$ une famille de vecteurs de $F$. Alors il existe une unique application linéaire $f$ de $E$ dans $F$ telle que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $f(e_i) = v_i$. Il s'agit de l'application*

$$f : x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E \longmapsto \sum_{i=1}^{n} x_i v_i.$$

*Autrement dit, une application linéaire de $E$ dans $F$ est entièrement définie par la donnée des images des vecteurs d'une base de $E$. De plus*

1. *$f$ est injective si et seulement si $(v_1, \dots, v_n)$ est une famille libre de $F$.*
2. *$f$ est surjective si et seulement si $(v_1, \dots, v_n)$ est une famille génératrice de $F$.*
3. *$f$ est un isomorphisme si et seulement si $(v_1, \dots, v_n)$ est une base de $F$.*

Une conséquence pratique de l'unicité est le théorème suivant :

**Théorème.** *Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels de dimension finie. Si $f$ et $g$ sont deux applications linéaires qui coïncident sur une base de $E$, alors elles sont égales.*

## 2) Isomorphismes en dimension finie

**Théorème.** *On suppose que $E$ et $F$ sont de dimension finie.*

1. *$\exists u \in \mathscr{L}(E, F)$ surjective $\iff \dim(F) \leqslant \dim(E)$.*
2. *$\exists u \in \mathscr{L}(E, F)$ injective $\iff \dim(F) \geqslant \dim(E)$.*
3. *$\exists u \in \mathscr{L}(E, F)$ bijective $\iff \dim(F) = \dim(E)$.*

Attention, le théorème ne dit PAS que si $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et si $\dim(E) \leqslant \dim(F)$ alors $u$ est injective (prendre l'application nulle). Par contre, si $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et si $\dim(E) > \dim(F)$, alors on peut affirmer que $u$ n'est pas injective. On pourra même être plus précis et donner la dimension du noyau : cf. paragraphe IV.3.

Démonstration.

1. Supposons qu'il existe $u \in \mathscr{L}(E, F)$ surjective. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de $E$. Alors $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est une famille génératrice de $F$ donc (le cardinal d'une famille génératrice est supérieur ou égal à la dimension) :

$$\dim(F) \leqslant \operatorname{card}(u(e_1), \dots, u(e_n)) = n = \dim(E).$$

Réciproquement, supposons que $\dim(E) \geqslant \dim(F)$. On se donne $(e_1, \dots, e_n)$ une base de $E$ et $(f_1, \dots, f_p)$ (avec $p \leqslant n$) une base de $F$. Soit $u$ l'unique application linéaire de $E$ dans $F$ vérifiant $u(e_1) = f_1, \dots, u(e_p) = f_p$, $u(e_{p+1}) = 0, \dots, u(e_n) = 0$. Comme $u$ envoie une base sur une famille génératrice, elle est surjective.

Elle existe d'après le théorème de caractérisation par l'image d'une base.

2. La démonstration est analogue est laissée en exercice.
3. Découle de 1 et 2. □

On rappelle que deux espaces vectoriels $E$ et $F$ sont dits isomorphes si il existe un isomorphisme de l'un dans l'autre. Ainsi :

**Théorème.** *Deux espaces vectoriels de dimension finie sont isomorphes si et seulement s'ils ont la même dimension*

Le corollaire ci-contre peut se montrer directement : si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de $E$, alors on vérifie que l'application

$$\varphi : x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \longmapsto (x_1, \dots, x_n)$$

est un isomorphisme de $E$ dans $\mathbb{R}^n$.

**Corollaire.** *Tout espace vectoriel $E$ de dimension finie $n \geqslant 1$ est isomorphe à $\mathbb{R}^n$.*

Démonstration. Le espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est de dimension $n$ donc il est isomorphe à $E$ d'après la proposition précédente. □

**Corollaire.** *Tout espace vectoriel $E$ de dimension finie $n \geqslant 1$ est isomorphe à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.*

Démonstration. Le espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est de dimension $n \times 1$ donc il est isomorphe à $E$ d'après la proposition précédente. □

**Remarque :** On peut donc parfois faire un abus de langage et « identifier » deux espaces vectoriels de même dimension finie, puisqu'ils sont isomorphes. Par exemple :

- on peut identifier un élément $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ à l'élément
$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),$$
- on peut identifier $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}$, ce qui permet de dire (par exemple) que si $X$ et $Y$ appartiennent à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ alors ${}^tXY \in \mathbb{R}$ (alors qu'en fait c'est un élément de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$).

**Théorème.** *Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels de dimension finie. Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$f$ est un isomorphisme de $E$ sur $F$.*
2. *$f$ transforme toute base de $E$ en une base de $F$.*
3. *$f$ transforme une base de $E$ en une base de $F$*

Démonstration. L'implication $1 \Rightarrow 2$ est le troisième point du théorème de caractérisation par l'image d'une base. L'implication $2 \Rightarrow 3$ est immédiate.

Montrons l'implication $3 \Rightarrow 1$. Soit $f$ une application linéaire de $E$ dans $F$ qui transforme une certaine base $(e_1, \dots, e_n)$ de $E$ en une base $(v_1, \dots, v_n)$ de $F$. Le théorème de caractérisation par l'image d'une base entraîne alors que $f$ est uniquement déterminée et, puisque $(v_1, \dots, v_n)$ est une base, il s'ensuit que $f$ est un isomorphisme. □

**Proposition.** *Soit $f$ un isomorphisme de $E$ dans $F$ où $E$ et $F$ sont deux espace vectoriel de dimension finie. Si $(v_1, \dots, v_p)$ est une famille de vecteurs de $E$, alors* $\mathrm{rg}(v_1, \dots, v_p) = \mathrm{rg}(f(v_1), \dots, f(v_p))$.

Démonstration. Par définition $\mathrm{rg}(v_1, \dots, v_p) = \dim(\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_p))$ et

$$\mathrm{rg}(f(v_1), \dots, f(v_p)) = \dim(\mathrm{Vect}(f(v_1), \dots, f(v_p))) = \dim\big(f\big(\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_p)\big)\big).$$

Il suffit donc de montrer que $\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_p)$ et $f(\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_p))$ sont isomorphes et alors leurs dimensions sont égales d'après la proposition précédente.

Introduisons la restriction $\widetilde{f} \ : \ \begin{array}{ccc} \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_p) & \longrightarrow & f\big(\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_p)\big) \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$.

On a vu dans le chapitre 21 que la restriction d'une application linéaire à des sous-espaces vectoriels est encore une application linéaire. Par construction, elle est surjective. Elle est injective puisque, si $x \in \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_p)$ appartient à $\mathrm{Ker}(\widetilde{f})$, alors $\widetilde{f}(x) = 0$ donc $f(x) = 0$ et donc $x = 0$ (puisque $f$ est un isomorphisme). D'où la proposition. □

### 3) Rang d'une application linéaire

**Proposition/Définition (rang d'une application linéaire).** *Soit $f$ une application linéaire de $E$ dans $F$. Si $E$ est de dimension finie alors $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension finie. Dans ce cas, la dimension de $\mathrm{Im}(f)$ est appelée rang de $f$ et notée $\mathrm{rg}(f)$. De plus on a $\mathrm{rg}(f) \leqslant \dim(E)$.*

*Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de $E$, alors $\mathrm{rg}(f)$ est aussi le rang de la famille de vecteurs $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$.*

Démonstration.

□

**Remarque :** Si $E$ et $F$ sont de dimension finie, puisque $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $F$, on a de plus

$$\mathrm{rg}(f) \leqslant \min\big(\dim(E), \dim(F)\big).$$

**Proposition.** *Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Nous avons $\mathrm{rg}(f) = 0$ si et seulement si $f$ est l'application nulle.*

Démonstration. Nous avons $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)) = 0$ si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = \{0\}$ si et seulement si, pour tout $x \in E$, $f(x) = 0$. □

***Exemple :*** *Soit $f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto (x + z, x - y, y + z, x + z) \in \mathbb{R}^4$. Il s'agit d'une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$.*

⚠ Pour appliquer le théorème du rang, $E$ (l'espace de départ) doit être de dimension finie, mais $F$ (l'espace d'arrivée) peut être de dimension infinie.

**Théorème (théorème du rang).** *Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Si $E$ est de dimension finie alors*

$$\mathrm{rg}(f) + \dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(E).$$

*Autrement dit*

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(E).$$

Démonstration. Si $\dim(E) = 0$, alors $E = \{0\}$ donc $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f) = \{0\}$ et donc

$$\mathrm{rg}(f) + \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 0 + 0 = 0 = \dim(E).$$

Supposons que $n = \dim(E) \geqslant 1$.

Le théorème du rang ne dit **pas** que

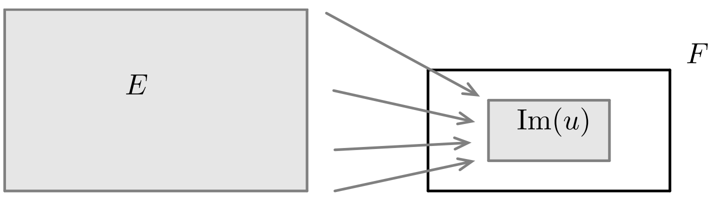
$$\mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u) = E$$

, ni même que $E = \mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Im}(u)$. Tout d'abord, $\mathrm{Im}(u)$ n'a aucune raison d'être inclus dans $E$ (rappelons que $\mathrm{Im}(u)$ est un sous-espace vectoriel de $F$) mais, même si c'est le cas (si, par exemple, $u$ est un endomorphisme de $E$), on n'a pas forcément

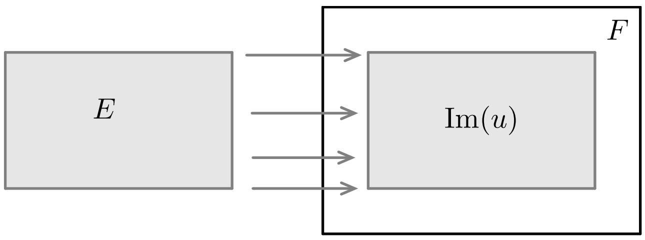
$$\mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Im}(u) = E. \quad \square$$

**Remarques :**

- D'après le théorème du rang, $\mathrm{rg}(u) = \dim(E) - \dim \mathrm{Ker}(u)$. De manière imagée : « la taille de l'image est égale à la taille de l'ensemble de départ, moins la taille de ce qu'on perd en l'envoyant sur $0$ ».
- En particulier, une application linéaire ne peut que « contracter » son ensemble de définition, l'image est « plus petite » que l'ensemble de départ. Attention, les dessins qui suivent sont peu rigoureux !




Dans le meilleur des cas (quand $\dim \mathrm{Ker}(u) = 0$, i.e. quand $u$ est injective), l'image est « de même taille que l'espace de départ ».



***Exemples :***

- *Reprenons l'exemple de l'application linéaire*

$$f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto (x+z, x-y, y+z, x+z) \in \mathbb{R}^4.$$

- *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On souhaite résoudre l'équation $XP' = P$ d'inconnue $P \in \mathbb{R}_n[X]$.*

**Corollaire.** *Soient $E$ et $F$ deux espace vectoriel de dimension finie. Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors*

1. *$f$ est injective si et seulement si $\operatorname{rg}(f) = \dim(E)$,*
2. *$f$ est surjective si et seulement si $\operatorname{rg}(f) = \dim(F)$.*

Démonstration.

1. L'application linéaire $f$ est injective si et seulement si $\operatorname{Ker}(f) = \{0\}$ si et seulement si $\dim(\operatorname{Ker}(f)) = 0$. Le théorème du rang entraîne que $f$ est injective si et seulement si $\operatorname{rg}(f) = \dim(E)$.
2. $f$ est surjective si et seulement si $\operatorname{Im}(f) = F$ si et seulement si $\operatorname{rg}(f) = \dim(F)$ (car $\operatorname{Im}(f) \subset F$). □

On constante que seul le premier point est une conséquence du théorème du rang.

**Théorème.** *Soient $E$ et $F$ deux espace vectoriel de dimension finie. Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *$f$ est un isomorphisme de $E$ dans $F$,*
2. *$f$ est injective et $\dim(E) = \dim(F)$,*
3. *$f$ est surjective et $\dim(E) = \dim(F)$.*

*Si $\dim(E) = \dim(F)$ (en particulier si $f$ est un endomorphisme de $E$), alors*

$$f \text{ bijective} \iff f \text{ injective} \iff f \text{ surjective.}$$

Démonstration.

□

En dimension finie, une seule des deux égalités suffit, mais en général, il faut les deux égalités.

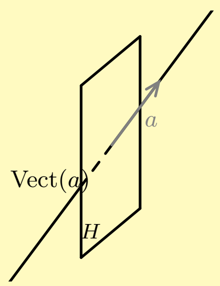
**Corollaire.** *On suppose que $E$ et $F$ sont de même dimension finie. Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$. S'il existe $v \in L(F, E)$ tel que $u \circ v = \mathrm{Id}_F$ ou $v \circ u = \mathrm{Id}_E$, alors $u$ est un isomorphisme et $v = u^{-1}$.*

Démonstration. On suppose qu'il existe $v \in \mathscr{L}(F, E)$ tel que $u \circ v = \mathrm{Id}_F$ (raisonnement analogue dans l'autre cas). Soit $y \in F$. Alors $u(v(y)) = y$ i.e. $v(y)$ est un antécédent de $y$ par $u$. L'application linéaire $u$ est donc surjective. Ainsi $u$ est une application linéaire surjective entre deux espaces vectoriels de même dimension finie donc elle est bijective. Par conséquent $v(y)$ est l'unique antécédent de $y$ par $u$ donc $v(y) = u^{-1}(y)$. □

## 4) Formes linéaires, hyperplans en dimension finie

Dans ce paragraphe, on suppose que $E$ est de dimension finie.

Dans $\mathbb{R}^3$ :




**Définition.** *Un sous-espace vectoriel $H$ de $E$ est un hyperplan s'il existe $a \in E$ non nul tel que $E = H \oplus \mathrm{Vect}(a)$. En d'autres termes, un hyperplan est un sous-espace vectoriel de $E$ qui admet un supplémentaire de dimension $1$.*

**Théorème.** *Soit $H$ un sous-espace vectoriel de $E$. Alors $H$ est un hyperplan de $E$ si et seulement si $\dim(H) = \dim(E) - 1$.*

Démonstration. Soit $p = \dim(H)$. Comme $E$ est de dimension finie, $H$ admet un supplémentaire. De plus, tous ses supplémentaires sont de même dimension $\dim(E) - p$. Ainsi $H$ est un hyperplan si et seulement si $H$ admet un supplémentaire de dimension $1$ si et seulement si $p = \dim(E) - 1$. □

Rappelons qu'une forme linéaire sur $E$ est une application linéaire de $E$ dans $\mathbb{R}$.

***Exemple :*** *Si $E = \mathbb{R}^4$, alors* $\varphi : \begin{cases} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z, t) & \longmapsto & 19x - 3z + 5t \end{cases}$ *est une forme linéaire.*

Il ne faut pas oublier de préciser qu'elle est non nulle ! Il faut donc expliciter un élément qui a une image non nulle.

**Théorème (caractérisation pratique des hyperplans).** *Le noyau d'une forme linéaire non nulle est un hyperplan.*

Démonstration.

La réciproque est vraie, c'est-à-dire qu'un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle, mais ce n'est pas au programme.

***Exemple :*** *Il est immédiat que* $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, 19x - 3z + 5t = 0\}$ *est un hyperplan de* $\mathbb{R}^4$ *puisqu'il s'agit de* $\mathrm{Ker}(\varphi)$ *avec* $\varphi$ *la forme linéaire de l'exemple ci-dessus.*