Chapitre 25

Somme de sous-espaces vectoriels

Dans ce chapitre on se donne E un espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ et $F_1, \ldots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E.

I Notion de somme de sous-espaces vectoriels

1) Définitions et exemples

On a $x \in F_1 + F_2$ si et seulement si il existe (x_1, x_2) dans $F_1 \times F_2$ tel que $x = x_1 + x_2$. Autrement dit $F_1 + F_2$ est l'ensemble des vecteurs de E qui s'écrivent comme la somme d'un vecteur de F_1 et d'un vecteur de F_2.

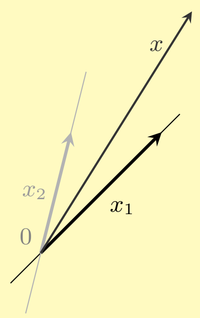
Définition. *On appelle somme de F_1 et F_2 et on note $F_1 + F_2$ l'ensemble*

$$F_1 + F_2 = \left\{ x_1 + x_2 \,\middle|\, (x_1, x_2) \in F_1 \times F_2 \right\}.$$

Exemples :

- *Dans $\mathbb{R}^2$, si F_1 et F_2 sont deux droites vectorielles (rappelons qu'une droite est un sous-espace vectoriel engendré par un vecteur non nul) distinctes, alors $\mathbb{R}^2 = F_1 + F_2$. En effet, donnons-nous (a_1, b_1) et (a_2, b_2) deux vecteurs non colinéaires de $\mathbb{R}^2$ tels que $F_1 = \mathrm{Vect}((a_1, b_1))$ et $F_2 = \mathrm{Vect}((a_2, b_2))$. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a*

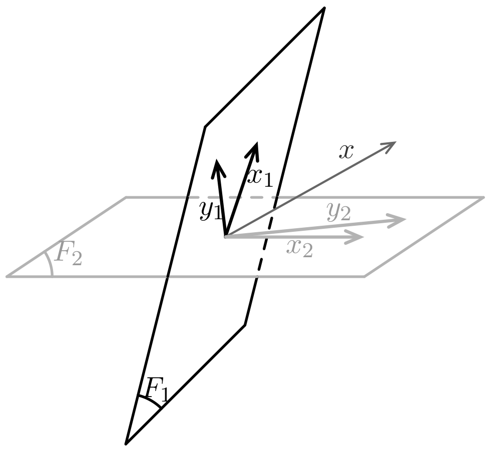
$$(x, y) = \underbrace{\frac{xb_2 - ya_2}{a_1b_2 - a_2b_1}(a_1, b_1)}_{=x_1 \in F_1} + \underbrace{\frac{ya_1 - xb_1}{a_1b_2 - a_2b_1}(a_2, b_2)}_{=x_2 \in F_2}.$$



Puisque dans cet exemple, il y a unicité, on dira plus loin (cf. paragraphe II.2) que x_1 est le projeté de x sur F_1 parallèlement à F_2, et que x_2 est le projeté de x sur F_2 parallèlement à F_1.

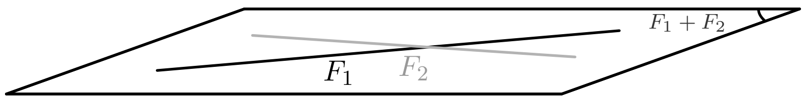
  Ici. on peut même montrer que $x_1 \in F_1$ et $x_2 \in F_2$ sont uniques (cf. critères d'unicité du paragraphe suivant).

- *Dans $\mathbb{R}^3$, si F_1 et F_2 sont deux plans vectoriels (rappelons qu'un plan vectoriel est un sous-espace vectoriel engendré par deux vecteurs non colinéaires) distincts, on a encore $\mathbb{R}^3 = F_1 + F_2$ (cf. chapitre 26 pour une preuve) mais il n'y a pas unicité de x_1 et de x_2. Sur le dessin ci-dessous le vecteur x s'écrit à la fois $x = x_1 + x_2$ et $x = y_1 + y_2$ avec x_1, y_1 distincts dans F_1 et x_2, y_2 distincts dans F_2.*



On n'a pas forcément $E = F_1 + F_2$.

Par exemple, dans $\mathbb{R}^3$, si F_1 et F_2 sont deux droites vectorielles distinctes, alors $F_1 + F_2$ est un plan vectoriel (i.e. contenant 0) mais pas $\mathbb{R}^3$ tout entier :



Toutes ces considérations d'existence et d'unicité sont au cœur de ce chapitre.

Proposition. *La somme $F_1 + F_2$ est un sous-espace vectoriel de E qui contient F_1 et F_2.*

Démonstration.

□

Exemple : *On vérifie aisément que les ensembles $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x = 0\}$, $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x = y = 0\}$ et $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x = z = 0\}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Montrons que $F_1 + F_2 = G$.*

Plus généralement, par récurrence :

On a $x \in \sum_{i=1}^{n} F_i$ si et seulement si il existe $x_1 \in F_1$, $x_2 \in F_2$, ..., $x_n \in F_n$ tels que $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$.

Définition. *L'ensemble*

$$F_1 + \cdots + F_n = \{x_1 + \cdots + x_n \,|\, (x_1, \ldots, x_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n\}$$

est un sous-espace vectoriel de E qui contient $F_1, \ldots, F_n$. On l'appelle somme de $F_1, \ldots, F_n$.

Remarque : Par commutativité de l'addition, l'espace vectoriel $F_1 + \cdots + F_n$ ne dépend pas de l'ordre dans lequel on somme $F_1, \ldots, F_n$.

Exemple :

2) Somme directe de sous-espaces vectoriels

On a $x \in \bigoplus_{i=1}^{n} F_i$ si et seulement si il existe des **uniques** $x_1 \in F_1$, $x_2 \in F_2, \ldots, x_n \in F_n$ tels que $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$.

Définition (somme directe de sous-espaces vectoriels). *On dit que la somme de $F_1, \ldots, F_n$ est directe si tout vecteur $x \in F_1 + \cdots + F_n$ s'écrit de façon **unique** sous la forme $x = x_1 + \cdots + x_n$, avec $x_i \in F_i$ pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$.*

La somme $F_1 + \cdots + F_n$ se note alors $F_1 \oplus \cdots \oplus F_n$ ou $\bigoplus_{i=1}^{n} F_i$.

Si $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_n$, on dit que E est somme directe de $F_1, \ldots, F_n$.

Exemple :

Cela signifie que si $x \in E$ s'écrit à la fois $x = x_1 + \cdots + x_n$ et $x = y_1 + \cdots + y_n$ (avec $x_i \in F_i$ et $y_i \in F_i$ pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$), alors $x_1 = y_1, \dots, x_n = y_n$.

⚠ Ne pas confondre :

- unicité dans la décomposition d'un vecteur $x \in E$ en tant que somme $x_1 + \cdots + x_n$ de vecteurs de $F_1 \times \cdots \times F_n$.
- unicité de la décomposition de E comme somme d'espaces vectoriels... ce qui n'est jamais le cas.

Reprenons l'exemple précédent : on a

$$\begin{aligned}\mathbb{R}_4[X] &= \mathrm{Vect}(1, X^2) \oplus \mathrm{Vect}(X, X^3, X^4) \\ &= \mathrm{Vect}(X^3) \oplus \mathrm{Vect}(1, X, X^2, X^4) \\ &= \mathbb{R}_4[X] \oplus \{0\} \\ &= \mathrm{Vect}(1) \oplus \mathrm{Vect}(X) \oplus \mathrm{Vect}(X^2) \oplus \mathrm{Vect}(X^3) \oplus \mathrm{Vect}(X^4)\end{aligned}$$

Mais au sein de chacune de ces décompositions, chaque vecteur s'écrit de façon unique comme somme de vecteurs.

Remarque :

C'est un cas particulier du théorème de concaténation des bases, cf. paragraphe I.3.

Voyons quelques critères pour montrer qu'une somme de sous-espaces vectoriels est directe (le premier n'est pas explicitement au programme mais très classique).

Proposition (HP). *La somme $F_1 + \cdots + F_n$ est directe si et seulement si*

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n, \quad (x_1 + \cdots + x_n = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = \cdots = x_n = 0).$$

Une somme est directe si et seulement si la seule décomposition donnant 0 est celle où tous les vecteurs sont nuls. Remarquons l'analogie avec les familles libres. Il n'y a rien d'étonnant : dans les deux cas ce sont des critères d'unicité.

Démonstration. Supposons que $F_1 + \cdots + F_n = F_1 \oplus \cdots \oplus F_n$. Donnons-nous $(x_1, \dots, x_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n$ tel que $x_1 + \cdots + x_n = 0$. Puisqu'on a aussi

$$0 = \underbrace{0}_{\in F_1} + \underbrace{0}_{\in F_2} + \cdots + \underbrace{0}_{\in F_n}$$

et que la décomposition est unique par hypothèse, on a nécessairement $x_1 = \cdots = x_n = 0$. Réciproquement, supposons que

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n, \quad (x_1 + \cdots + x_n = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = \cdots = x_n = 0).$$

Si $x \in E$ s'écrit à la fois $x = x_1 + \cdots + x_n$ et $x = y_1 + \cdots + y_n$ avec $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ dans $F_1 \times \cdots \times F_n$ (c'est-à-dire x se décompose de deux façons différentes), alors

différentes a priori : elles peuvent (et vont) être les mêmes.

$$\underbrace{x_1 - y_1}_{\in F_1} + \underbrace{x_2 - y_2}_{\in F_2} + \cdots + \underbrace{x_n - y_n}_{\in F_n} = x - x = 0.$$

Par hypothèse, on a donc $x_1 - y_1 = x_2 - y_2 = \cdots = x_n - y_n = 0$. Ainsi $(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n)$. D'où l'unicité de la décomposition : la somme est directe. $\square$

Exemple : *Introduisons les ensembles $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \,|\, P(X) = P(-X)\}$,*

$$\begin{aligned}G &= \{P \in \mathbb{R}_3[X] \,|\, P(0) = P(1) = P(2) = 0\} \\ H &= \{P \in \mathbb{R}_3[X] \,|\, P(1) = P(2) = P(3) = 0\}.\end{aligned}$$

Nous laissons en exercice la vérification que F, G et H sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_3[X]$. Montrons que la somme de F, G et H est directe en utilisant la proposition précédente.

C'est une condition nécessaire et suffisante dans le cas où $n = 2$ mais qui ne se généralise pas (cf. contre-exemple ci-dessous).

Proposition. *La somme de $F_1 + F_2$ est directe si et seulement si $F_1 \cap F_2 = \{0\}$.*

DÉMONSTRATION.

□

Exemple : *Reprenons l'exemple du paragraphe précédent avec les sous-espaces vectoriels $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x = y = 0\}$ et $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x = z = 0\}$ de $\mathbb{R}^3$.*

Le critère avec l'intersection réduite à $\{0\}$ ne fonctionne donc que lorsque c'est une somme de deux sous-espaces vectoriels.

Remarque : On peut montrer que, si la somme $F_1 + \cdots + F_n$ est directe, alors $F_i \cap F_j = \{0\}$ pour tout $(i, j) \in [\![1\,;n]\!]^2$ tels que $i \neq j$. $\rightsquigarrow$ EXERCICE.

⚠ La réciproque est vraie si $n = 2$ comme on vient de le voir mais elle est fausse si $n \geqslant 3$ en général.

Par exemple considérons $F = \mathrm{Vect}((1, 0))$, $G = \mathrm{Vect}((0, 1))$ et $H = \mathrm{Vect}((1, 1))$ qui sont trois sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$. On vérifie aisément que $F \cap G = G \cap H = F \cap H = \{0\}$. Pourtant la somme $F + G + H$ n'est pas directe. En effet :

$$(1, 1) = (0, 0) + (0, 0) + (1, 1) \in F + G + H$$
$$\text{et} \quad (1, 1) = (1, 0) + (0, 1) + (0, 0) \in F + G + H$$

et donc il n'y a pas unicité dans la décomposition de $(1, 1)$.

3) Théorème de concaténation des bases

Notons-la $(\mathscr{F},\mathscr{G})$.

Définition (concaténation de familles). *Soient p et k des entiers naturels non nuls. Si $\mathscr{F} = (x_1,\dots,x_p)$ et $\mathscr{G} = (y_1,\dots,y_k)$ sont deux familles de vecteurs de E, on appelle concaténation de $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$, la famille $(x_1,\dots,x_p,y_1,\dots,y_k)$.*

Lemme. *Si F_1 et F_2 admettent des familles génératrices respectives $\mathscr{G}_1$ et $\mathscr{G}_2$, alors la concaténation de $\mathscr{G}_1$ et $\mathscr{G}_2$ engendre F_1+F_2.*

Démonstration.

□

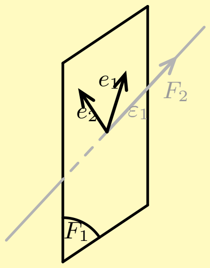
Exemple :

D'après le lemme précédent, le caractère générateur est automatique. La somme est directe si et seulement si la concaténation est libre.

Théorème (de concaténation des bases). *Supposons que F_1 et F_2 admettent des bases respectives $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$. Les espaces F_1 et F_2 sont en somme directe si et seulement si la concaténation de $\mathscr{B}_1$ et de $\mathscr{B}_2$ est une base de F_1+F_2.*

Ce théorème est très important : dans le chapitre 26, il permettra de démontrer plusieurs critères permettant de montrer qu'un espace vectoriel s'écrit comme une somme directe de sous-espaces vectoriels de manière plus simple.

Démonstration.



Ici, dans $\mathbb{R}^3$, (e_1, e_2) est une base du plan F_1 et (ε_1) une base de la droite F_2. La concaténation $(e_1, e_2, \varepsilon_3)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$ donc

$$\mathbb{R}^3 = F_1 \oplus F_2.$$

□

Par récurrence, on montre que

Théorème (de concaténation des bases). *Supposons que $F_1, \dots, F_n$ admettent des bases respectives $\mathscr{B}_1, \dots, \mathscr{B}_n$. La somme $F_1 + F_2 + \dots + F_n$ est directe si et seulement si la concaténation de $\mathscr{B}_1, \dots, \mathscr{B}_n$ est une base de $F_1 + F_2 + \dots + F_n$.*

Comme précédemment, le caractère générateur est automatique.

Exemple : *Reprenons à zéro l'exemple des sous-espaces vectoriels $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] | P(X) = P(-X)\}$, $G = \{P \in \mathbb{R}_3[X] | P(0) = P(1) = P(2) = 0\}$ et $H = \{P \in \mathbb{R}_3[X] | P(1) = P(2) = P(3) = 0\}$ du paragraphe I.2.*

II Supplémentaires et projecteurs

1) Supplémentaire d'un sous-espace vectoriel

Définition (espace supplémentaire). *Soit F un sous-espace vectoriel de E. On dit qu'un sous-espace vectoriel G de E est un supplémentaire (dans E) de F si $E = F \oplus G$.*

Bien sûr on dit aussi que F est un supplémentaire de G dans E. On dit aussi que F et G sont supplémentaires dans E.

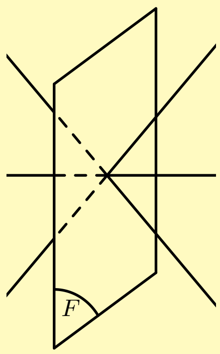
Exemple : *E et $\{0_E\}$ sont supplémentaires.*

La proposition suivante découle immédiatement de la définition d'une somme directe et du critère du paragraphe précédent :

Proposition. *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *$E = F \oplus G$,*
2. *$\forall x \in E, \exists!(y, z) \in F \times G, x = y + z$,*
3. *$E = F + G$ et $F \cap G = \{0\}$.*

On parle d'un supplémentaire (à ne pas confondre avec le complémentaire) de F. On peut montrer qu'il n'y a jamais unicité sauf si $F = E$ ou $F = \{0_E\}$. Par exemple, dans $\mathbb{R}^3$, toutes les droites ci-dessous sont des supplémentaires de F. Plus généralement, dans cet exemple uniquement, toute droite vectorielle non incluse dans F est un supplémentaire de F.



On déduit du théorème de concaténation des bases (cf. paragraphe I.3) :

Théorème (de concaténation des bases). *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E admettant des bases $\mathscr{B}_F$ et $\mathscr{B}_G$. Les espaces F et G sont supplémentaires si et seulement si la concaténation de $\mathscr{B}_F$ et $\mathscr{B}_G$ est une base de E.*

Exemples :

- *Notons $I(\mathbb{R})$ (respectivement. $P(\mathbb{R})$) l'ensemble des fonctions impaires (respectivement. paires) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrons que $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = I(\mathbb{R}) \oplus P(\mathbb{R})$.*
  - *$I(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. En effet la fonction nulle est impaire puis, si f et g sont deux fonctions impaires et λ est un réel, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et*
  $$(\lambda f + g)(-x) = \lambda f(-x) + g(-x) = \lambda(-f(x)) + (-g(x)) = -(\lambda f + g)(x).$$
  Ainsi $\lambda f + g$ est impaire. On montre de façon analogue que $P(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
  - *On a montré dans le chapitre 1 que toute fonction $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ s'écrit de façon unique comme somme d'une fonction impaire et d'une fonction paire, c'est-à-dire comme somme d'un élément de $I(\mathbb{R})$ et d'un élément de $P(\mathbb{R})$. En d'autres termes, $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = I(\mathbb{R}) \oplus P(\mathbb{R})$.*
- *Soit B un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}^*$. Introduisons le sous-espace vectoriel $F = \big\{P \in \mathbb{R}[X] \,\big|\, B \text{ divise } P\big\}$. Montrons que $\mathbb{R}[X] = F \oplus \mathbb{R}_{n-1}[X]$.*

- *On a montré dans le paragraphe II.3 du chapitre 19 que toute matrice* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *s'écrit de façon unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique. Finalement* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
- *Soient* $F = \mathrm{Vect}((-1,0,1))$ *et* $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x-y-z=0\}$. *Montrons que* $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

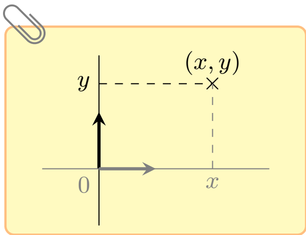
Autre méthode possible : utiliser le théorème de concaténation des bases. Une base de F est $((-1,0,1))$ et on trouve facilement qu'une base de G est $\big((1,1,0),(1,0,1)\big)$. On vérifie alors que la concaténation de ces deux bases donne une base de $\mathbb{R}^3$. C'est plus rapide mais ne donne pas la décomposition exacte.

⚠ En général un sous-espace vectoriel admet plusieurs supplémentaires.

Par exemple $F = \mathrm{Vect}((1,0))$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^2$. *On a*

— $\mathbb{R}^2 = F \oplus G$ *avec* $G = \mathrm{Vect}((0,1))$ *puisque* $F \cap G = \{(0,0)\}$ *et*

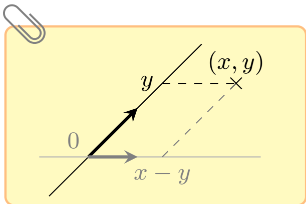
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad (x,y) = \underbrace{x(1,0)}_{\in F} + \underbrace{y(0,1)}_{\in G}.$$



Ci-contre le vecteur de coordonnées $(1,0)$ *est représenté en gris et le vecteur de coordonnées* $(0,1)$ *est représenté en noir.*

— $\mathbb{R}^2 = F \oplus H$ *avec* $H = \mathrm{Vect}((1,1))$ *puisque* $F \cap H = \{(0,0)\}$ *et*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad (x,y) = \underbrace{(x-y)(1,0)}_{\in F} + \underbrace{y(1,1)}_{\in H}.$$



Ci-contre le vecteur de coordonnées $(1,0)$ *est représenté en gris et le vecteur de coordonnées* $(1,1)$ *est représenté en noir.*

Pourtant G *et* H *sont distincts.*

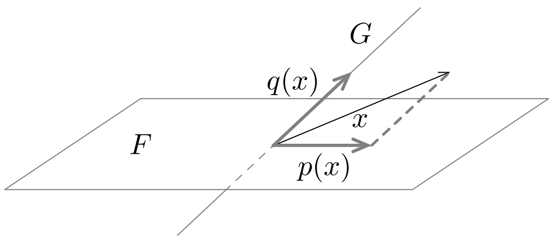
2) Projections vectorielles

On peut dire aussi projecteur au lieu de projection. En effet on verra dans le paragraphe suivant qu'un projecteur (cf. chapitre 21) est une projection et réciproquement.

Définition (projection vectorielle). *Soient* F *et* G *deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de* E *(i.e.* $E = F \oplus G$*). Pour tout* $x \in E$*, il existe un unique couple de vecteurs* $(u_x, v_x) \in F \times G$ *tel que* $x = u_x + v_x$.
L'application $p : x \in E \longmapsto u_x$ *est appelée projection sur* F *parallèlement à* G.
L'application $q : x \in E \longmapsto v_x$ *est appelée projection sur* G *parallèlement à* F.

Remarque : On a $q = \mathrm{Id}_E - p$.

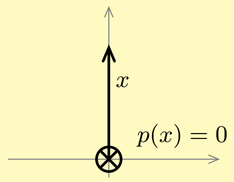
Exemple : *Ci-dessous un exemple dans* $\mathbb{R}^3$.



Exemple : *On a* $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Vect}((1,1)) \oplus \mathrm{Vect}((2,-3))$. *En effet, procédons par analyse-synthèse :*

Exemple : *Dans le paragraphe II.3 du chapitre 19, on a montré que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. En regardant la décomposition, on obtient que la projection sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ parallèlement à $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est $p : M \longmapsto \dfrac{M + {}^tM}{2}$ et la projection sur $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ parallèlement à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est $q : M \longmapsto \dfrac{M - {}^tM}{2}$.*

Cela se voit bien sur un dessin : dans $\mathbb{R}^2$, si F est l'axe des abcisses et G l'axe des ordonnées, et si p est la projection sur F parallèlement à G :



De plus, si $x \in F$ i.e. si x appartient à l'axe des abscisses, alors x sera laissé invariant par F (nous laissons le lecteur faire un dessin pour s'en convaincre).

Lemme. *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. Soit p la projection sur F parallèlement à G.*

- *Si $x \in F$, alors $p(x) = x$.*
- *Si $x \in G$, alors $p(x) = 0$.*

Démonstration.

Bien sûr q est aussi un projecteur et on a $\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Im}(q) = G$, $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(q) = F$.

Proposition. *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. Soit p la projection sur F parallèlement à G. Alors*

1. *p un projecteur de E (i.e. $p \in \mathscr{L}(E)$ et $p \circ p = p$),*
2. *$\mathrm{Ker}(p) = G$,*
3. *$\mathrm{Im}(p) = F$.*

Démonstration.

Le fait que $p \circ p = p$ est attendu : projeter sur F un vecteur déjà projeté sur F, n'a aucun effet. Le projeté de x est son « ombre », et « l'ombre de l'ombre, c'est l'ombre ».

□

Exemple : *On a vu dans la partie I que* $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$ *avec* $F = \mathrm{Vect}((-1,0,1))$ *et* $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x-y-z=0\}$ *et que, pour tout* $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$(x,y,z) = \underbrace{\left(\frac{x-y-z}{2}, 0, \frac{-x+y+z}{2}\right)}_{\in F} + \underbrace{\left(\frac{x+y+z}{2}, y, \frac{x-y+z}{2}\right)}_{\in G}.$$

Ainsi :

Une projection vectorielle est donc un projecteur. Mais qu'en est-il de la réciproque ?

Et donc $q = \mathrm{Id}_E - p$ est la projection sur $\mathrm{Ker}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Im}(p)$ et on retrouve le fait que $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_E - p)$, $\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_E - p)$.

Proposition. *Si p est un projecteur de E, alors :*

1. $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$,
2. *p est la projection sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$.*

Démonstration.

□

Remarque : En vertu des deux résultats de ce paragraphe, on confond en général les notions de projecteur et de projection.

Exemple : *Dans le chapitre 21, on a montré que*

$$f : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto (2x+3y-z, -x-2y+z, -x-3y+2z)$$

est un projecteur de $\mathbb{R}^3$, *que* $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}((-1,1,1))$ *et que* $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\big((2,-1,-1),(-1,1,2)\big)$. *Ainsi :*