Chapitre 24

Séries numériques

Dans la chapitre 4, nous avons étudié les sommes de familles finies de réels. Nous allons désormais étudier le cas où l'on somme une famille de réels indexée par $\mathbb{N}$ (c'est-à-dire on somme les termes d'une suite réelle).

I Généralités sur les séries numériques

1) Définitions

Les séries numériques sont des cas particuliers des suites réelles. Cependant elles possèdent de nombreuses propriétés particulières que nous allons étudier dans ce chapitre.

On parle ici de séries numériques par opposition aux séries de fonctions, qui sont au programme en classes préparatoires scientifiques.

Définition. *Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres réels. On appelle série (numérique) de terme général u_n, et on note $\sum u_n$, la suite $(S_N)_{N\geqslant 0}$ définie par :*

$$\forall N \in \mathbb{N}, \qquad S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n.$$

- *Si $n \in \mathbb{N}, u_n$ est appelé terme d'ordre (ou d'indice, ou de rang) n de la série.*
- *Si $N \in \mathbb{N}$, S_N est appelée somme partielle d'ordre (ou d'indice, ou de rang) N de la série.*

L'indice est muet : on parlera aussi de la série $\sum u_k$, de la série $\sum u_p$ etc. ainsi que de la suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ définie par :

$$\forall n \geqslant 0,\ S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Remarque : Comme pour les suites, une série peut être définie à partir du rang $0, 1, 2$ ou plus généralement à partir d'un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ (par exemple, les séries du type $\sum 1/n^{\alpha}$ sont définies à partir du rang 1). En général, il n'y a aucune ambiguïté : on prend le plus petit n à partir duquel la suite de terme général u_n est définie (par exemple, pour $u_n = 1/n$, on démarre à partir du rang 1, et pour $u_n = \ln(n-1)$, à partir du rang 2). Dans la suite, on supposera que les séries commencent en 0, les autres cas s'y ramenant facilement comme dans le chapitre sur les suites.

Pour lever toute ambiguïté, on trouve dans certains sujets la notation $\displaystyle\sum_{n\geqslant n_0} u_n$, mais cette notation est dangereuse car il y a confusion avec la somme de la série (voir ci-dessous).

Remarque : On a $u_0 = S_0$ et, pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = S_n - S_{n-1}$.

Exemples :

La série harmonique est un exemple de série définie à partir du rang 1.

On se donne dans la suite du chapitre une série $\sum u_n$.

2) Séries convergentes et divergentes

Définition (nature d'une série).

- *On dit que la série* $\sum u_n$ *converge si la suite* $(S_N)_{N\geqslant 0}$ *converge, c'est-à-dire s'il existe* $S \in \mathbb{R}$ *tel que* $S_N = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} u_n \xrightarrow[N\to+\infty]{} S$.
  La limite est appelée la somme de la série, et on note $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
- *Si la suite* $(S_N)_{N\geqslant 0}$ *diverge (c'est-à-dire si elle tend vers* $\pm\infty$ *ou si elle n'admet pas de limite), on dit que la série* $\sum u_n$ *diverge.*
- *Étudier la nature d'une série consiste à déterminer si elle converge ou diverge. Deux séries numériques sont dites de même nature si elles convergent toutes les deux ou si elles divergent toutes les deux.*

On la note parfois $S = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ ou encore $S = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$

Ne pas confondre la notation $\sum u_n$ qui désigne une série (il s'agit d'une suite), la notation $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} u_n$ qui désigne la somme partielle d'ordre $N \in \mathbb{N}$ de la série (il s'agit d'un nombre) et la notation $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ qui désigne la somme de la série dans le cas où elle converge. On n'utilisera la dernière notation que lorsque l'on aura montré au préalable que la série converge (de la même manière que l'on ne parle de limite d'une suite que lorsque l'on a montré que celle-ci existe).

Remarque : En d'autres termes, une série converge si la suite de ses sommes partielles converge, et la somme de la série est (quand elle existe) la limite des sommes partielles.

Exemples :

Une série peut diverger sans que les sommes partielles tendent vers $\pm\infty$! Elles peuvent aussi ne pas avoir de limite !

En particulier, deux séries qui ne diffèrent que d'un nombre fini de termes sont de même nature.

Remarque : Si la série $\sum u_n$ converge et si $p \geqslant 1$, alors la suite $\left(\sum_{n=p}^{N} u_n\right)_{N \geqslant p}$ converge et sa limite est notée $\sum_{n=p}^{+\infty} u_n$. La convergence éventuelle d'une série ne dépend pas des premiers termes de la suite : seul compte ce qui se passe « au voisinage de $+\infty$ ».

Si on veut montrer un résultat concernant une somme infinie, on le montre pour une somme finie et (si c'est possible) on passe à la limite.

Proposition. *Soit $\sum u_n$ une série convergente. Soit $N \in \mathbb{N}$. Alors*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{N} u_n + \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n.$$

Démonstration. Soit $p \geqslant N+1$. On a

$$\sum_{n=0}^{p} u_n = \sum_{n=0}^{N} u_n + \sum_{n=N+1}^{p} u_n \xrightarrow[p \to +\infty]{} \sum_{n=0}^{N} u_n + \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n.$$

Par unicité de la limite, on a le résultat. □

Alors que la limite d'une suite ne dépend pas des premiers termes de la suite.

Remarque : On a dit que la convergence éventuelle ne dépendait pas des premiers termes de la série, mais la somme oui : en effet, par exemple, si $u_1 = 2021$ et si, pour tout $n \geqslant 2$, $u_n = 1/n^2$ alors la série $\sum u_n$ converge (la convergence ne dépend pas des premiers termes) et

Le reste n'existe que lorsque la série converge.

Définition. *Soit $\sum u_n$ une série convergente de somme S. Soit $N \in \mathbb{N}$. On appelle reste d'ordre N, noté R_N, la quantité*

$$R_N = S - S_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n.$$

La somme définissant le reste d'ordre N commence en $N+1$.

Remarque : En d'autres termes, le reste d'ordre N est la différence entre la somme et la somme partielle d'ordre N, et on a également $S = S_N + R_N$ c'est-à-dire que la somme est égale à la somme partielle plus le reste.

Proposition. *Soit $\sum u_n$ une série convergente. Alors $R_N \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$. En d'autres termes, le reste d'une série convergente tend vers 0.*

Démonstration. Immédiat car $S_N \xrightarrow[N \to +\infty]{} S$. □

En particulier les séries convergentes forment un sous-espace vectoriel de l'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles, et donc un espace vectoriel.

Théorème (linéarité). *Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries convergentes et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ converge et*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Démonstration. Soit $N \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{n=0}^{N} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{N} u_n + \mu \sum_{n=0}^{N} v_n \xrightarrow[N \to +\infty]{} \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

car les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent. Par conséquent,

$$\sum_{n=0}^{N} (\lambda u_n + \mu v_n) \xrightarrow[N \to +\infty]{} \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

En d'autres termes, $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ converge (car la suite des sommes partielles converge) et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

□

Cependant, une somme de séries divergentes peut converger : toujours penser en termes de limites. Par exemple, les deux séries $\sum 1/n$ et $\sum -1/n$ divergent mais la série nulle converge.

⚠ De même que dans le chapitre précédent, il faut impérativement montrer que les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent avant de casser la somme.

Remarque : Si $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et si $\sum \lambda u_n$ converge alors $\sum u_n = \sum \frac{1}{\lambda} \times \lambda u_n$ converge. En particulier, $\sum u_n$ et $\sum \lambda u_n$ sont de même nature.

En particulier, la somme d'une série positive convergente est positive (prendre $u_n = 0 \leqslant v_n$).

Proposition. *Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries convergentes et si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$. Si, de plus, il existe n_0 tel que $u_{n_0} < v_{n_0}$ alors l'inégalité est stricte.*

⇝ Exercice.

Remarque : Toutes les propriétés vraies pour les sommes finies sont encore valables pour les sommes infinies, à condition que toutes les sommes infinies existent bien, c'est-à-dire que toutes les séries convergent. Il faut donc montrer leur convergence avant d'appliquer ces résultats.

⚠ Il y a deux exceptions !

Pour montrer qu'une somme infinie de fonctions continues est continue, il faut le montrer à la main, mais il y a toujours des questions intermédiaires, voir ci-dessous la fonction exponentielle.

- Une somme infinie de fonctions continues n'est pas forcément continue ! En particulier, on ne peut pas passer à la limite dans une somme infinie, par exemple on ne peut pas affirmer directement que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n \xrightarrow[q\to 0]{} \sum_{n=0}^{+\infty} 0^n = 1$$

(on rappelle que $0^0 = 1$). De même pour dérivable etc.

- On ne peut pas intervertir une intégrale et une somme infinie, ni deux sommes infinies, c'est-à-dire qu'en général,

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} \neq \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} \neq \sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}.$$

3) Une condition NÉCESSAIRE importante

En d'autres termes, le terme général d'une série convergente tend vers 0.

Théorème. *Si $\sum u_n$ converge alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.*

Démonstration.

□

⚠ LA RÉCIPROQUE EST FAUSSE ! ! ! ! !

En d'autres termes, une série diverge grossièrement (et en particulier elle diverge) quand son terme général ne tend pas vers 0.

Exemple : $\dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ *mais* $\sum \dfrac{1}{n}$ *diverge.*

Théorème. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 alors la série $\sum u_n$ diverge : on dit qu'elle diverge grossièrement (DVG).*

Démonstration. C'est la contraposée du théorème précédent. □

Exemples :

4) Série télescopique associée à une suite

On a évidemment des résultats analogues pour les séries $\sum(u_n - u_{n+1})$ et $\sum(u_n - u_{n-1})$, qui sont parfois plus simples à étudier.

Proposition. *La <u>suite</u> $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si la <u>série</u> $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge, et si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers L, alors la série converge vers $L - u_0$. La série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ est appelée série télescopique associée à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Remarque : Avoir $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ ne suffit pas pour que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Par exemple, $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ mais la suite $(\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Démonstration.

□

Remarque : On peut évidemment généraliser au cas d'une suite qui ne démarre pas en 0. Par exemple, $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge si et seulement si la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge, et si la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers L, alors la série converge vers $L - u_1$.

5) Convergence absolue

Définition. *La série $\sum u_n$ converge absolument (CVA) si la série $\sum |u_n|$ converge.*

Pour une série à termes positifs, la convergence absolue est équivalente à la convergence.

Théorème. *Si $\sum u_n$ converge absolument alors $\sum u_n$ converge et*

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| \qquad \textit{(inégalité triangulaire).}$$

Démonstration.

□

⚠ La réciproque est fausse !

II Séries à termes positifs

Pour montrer qu'une série $\sum u_n$ dont les termes ne sont pas de signe constant converge, on étudie $\sum |u_n|$ pour montrer la convergence absolue. On se ramène donc à l'étude d'une série à termes positifs.

1) Condition nécessaire et suffisante de convergence

Théorème. *Une série $\sum u_n$ à termes positifs converge si et seulement si la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ de ses sommes partielles est majorée, et si ce n'est pas le cas, $S_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty$.*

On a un résultat analogue pour les séries à termes négatifs (mais elles sont plus rares) : une série à termes négatifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est minorée, et si ce n'est pas le cas, alors la suite de ses sommes partielles tend vers $-\infty$.

Démonstration. Il suffit de voir que $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est croissante puisque $\sum u_n$ est à termes positifs.

Remarques :

- On a déjà vu avec $\sum(-1)^n$ que c'est faux si la série n'est pas à termes positifs.
- Si $\sum u_n$ est une série à termes positifs, alors on peut toujours donner un sens à sa somme (dans $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$). Si elle diverge, cela signifie que $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ et donc on pourrait (mais dans le programme on ne le fait pas !) poser $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$.

Exemple : *Montrons (une nouvelle fois) que $\sum \frac{1}{n^2}$. Il s'agit d'une série à termes positifs.*

2) Théorèmes de comparaison

Théorème. *Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs. Si $\sum v_n$ converge et si $v_n \geqslant u_n$ à partir d'un certain rang, alors $\sum u_n$ converge.*

Démonstration. La démonstration est HP mais instructive.
Soit n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0, u_n \leqslant v_n$. Soit $N \geqslant n_0$.

$$\sum_{n=0}^{N} u_n = \sum_{n=0}^{n_0-1} u_n + \sum_{n=n_0}^{N} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{n_0-1} u_n + \sum_{n=n_0}^{N} v_n \leqslant \sum_{n=0}^{n_0-1} u_n + \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n.$$

En clair : « plus petit qu'un truc convergent, c'est convergent, et plus grand qu'un truc divergent, c'est divergent » (évidemment, pour les séries à termes positifs).

La dernière inégalité découle du fait que $\sum v_n$ est une série à termes positifs convergente, donc sa suite des sommes partielles est majorée par sa somme. Finalement, la série $\sum u_n$ est à termes positifs et la suite de ses sommes partielles est majorée. D'après le paragraphe précédent, la série $\sum u_n$ converge. □

Corollaire. *Avec les mêmes hypothèses sur $\sum u_n$ et $\sum v_n$, si la série $\sum u_n$ diverge, alors la série $\sum v_n$ diverge.*

Remarques :

- Si $\sum u_n$ converge ou si $\sum v_n$ diverge, on ne peut pas conclure.

- C'est faux si les séries ne sont pas à termes positifs. Par exemple, pour tout $n \geqslant 1$, $-\frac{1}{n} \leqslant 0$ mais $\sum -\frac{1}{n}$ diverge et $\sum 0$ converge.

Exemples :

Corollaire. *Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs.*

- *Si $u_n \sim v_n$ alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.*
- *Si $u_n = o(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.*

DÉMONSTRATION. ⚠ La démonstration est HP mais instructive.

- Supposons que $u_n \sim v_n$. Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $\frac{v_n}{2} \leqslant u_n \leqslant 2v_n$.
  — Premier cas : $\sum u_n$ converge. Alors $\sum \frac{v_n}{2}$ converge d'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, donc $\sum v_n$ converge.
  — Deuxième cas : $\sum u_n$ diverge. Alors $\sum 2v_n$ diverge d'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, donc $\sum v_n$ diverge.
- Supposons à présent que $u_n = o(v_n)$. Alors $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang et on conclut de la même manière. □

⚠ Rédaction type, à connaître absolument. En particulier, le mot « positif » doit apparaître. Dire « par théorème de comparaison » est insuffisant et sera sanctionné, à l'écrit comme à l'oral.

Exemple : *Déterminons la nature de la série $\sum \frac{n+1}{n^2}$.*

Exemple : *Déterminons la nature de la série $\sum e^{-n^2}$.*

⚠ C'est faux a priori si les séries ne sont pas à termes positifs.

Par exemple, on a vu dans le paragraphe I.5 que la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge et on verra dans le paragraphe III.5.b que la série $\sum \frac{1}{n\ln(n)}$ diverge. Il s'ensuit que la série $\sum \left(\frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n\ln(n)}\right)$ diverge. Pourtant $\frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n\ln(n)} \sim \frac{(-1)^n}{n}$ et $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge.

La somme d'une série convergente et d'une série divergente diverge. Toujours penser en termes de limites.

Remarque : Ce corollaire est toujours vrai pour les séries à termes négatifs car si $u_n \leqslant 0$ alors $-u_n \geqslant 0$ et on applique le corollaire à $\sum -u_n$. Attention, comme on vient de le voir, il n'est pas valide quand les séries ne sont pas de signe constant (typiquement, quand il y a un $(-1)^n$).

Rappelons que $\sum u_n$ et $\sum -u_n$ sont de même nature.

III Séries de référence

1) Séries de Riemann

Par exemple la série $\sum \left(\frac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}}$ n'est pas une série de Riemann car la puissance est variable.

Définition. *Les séries $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ (où α est un réel fixe) sont appelées séries de Riemann.*

a) Théorème de convergence

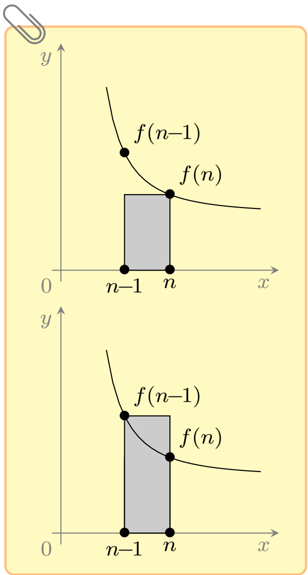
Théorème (convergence des séries de Riemann). *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.*

DÉMONSTRATION.

□

Remarque : La preuve de ce théorème utilise une technique fondamentale dans d'études des séries : la comparaison avec une intégrale. Bien que la technique générale ne soit pas au programme de Mathématiques approfondies, des cas particuliers peuvent être proposés en exercice (avec des questions intermédiaires). Il est donc bon de retenir les grandes étapes :

- On écrit que, pour n assez grand (disons à partir du rang $n_0 \in \mathbb{N}$), $u_n = f(n)$ avec f une fonction monotone. Si f est décroissante alors, pour tous $n \geqslant n_0$ et $x \in [n, n+1]$, $f(n+1) \leqslant f(x) \leqslant f(n)$.



- On intègre entre n et $n+1$: $f(n+1) \leqslant \displaystyle\int_n^{n+1} f(x)\,dx \leqslant f(n)$.
- On en déduit que, pour tout $n \geqslant n_0 + 1$,

$$\int_n^{n+1} f(x)\,dx \leqslant f(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f(x)\,dx$$

(l'inégalité de gauche est l'inégalité de droite du point précédent, l'inégalité de droite est l'inégalité de gauche du point précédent mais avec $n-1$ au lieu de n).

- On somme les intégrales : pour tout $N \geqslant n_0$,

$$\int_{n_0+1}^{N+1} f(x)\,dx \leqslant \underbrace{\sum_{n=n_0+1}^{N} f(n)}_{S_N - u_{n_0}} \leqslant \int_{n_0}^{N} f(x)\,dx.$$

- On calcule les intégrales (ou on minore la première et majore la deuxième) pour obtenir un encadrement explicite des sommes partielles et pouvoir conclure.

b) Utilisation des séries de Riemann

Les séries de Riemann sont des séries de références. Dans quasiment tous les exemples que nous rencontrerons, nous utiliserons des comparaisons (inégalités, petits o, équivalents) avec des séries de Riemann. Plus précisément : donnons-nous une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes positifs.

- Si il existe $\alpha > 1$ tel que la suite $(n^\alpha u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, alors $\sum u_n$ converge. C'est notamment le cas :
  — lorsque $u_n \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$.
  — lorsque $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ell}{n^\alpha}$ avec $\ell \in \mathbb{R}_+^*$ (c'est-à-dire $(n^\alpha u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ).
- Si il existe $\alpha \leqslant 1$ tel que la suite $(n^\alpha u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par une constante $c > 0$, alors $\sum u_n$ diverge. C'est notamment le cas :
  — lorsque $n^\alpha u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
  — lorsque $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ell}{n^\alpha}$ avec $\ell \in \mathbb{R}_+^*$ (c'est-à-dire $(n^\alpha u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ).

Exemples :

c) L'exemple des séries de Bertrand

d) Séries de Bertrand

Définition (HP). *Les séries* $\sum \frac{1}{n^\alpha(\ln(n))^\beta}$ *(où α et β sont deux réels fixes) sont appelées séries de Bertrand.*

Les séries de Bertrand sont définies à partir du rang 2.

Cherchons quand les séries de Bertrand convergent. Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $n \geqslant 2$. On pose $u_n = \frac{1}{n^\alpha(\ln(n))^\beta}$.

En conclusion :

Théorème (HP). *La série* $\sum \frac{1}{n^\alpha(\ln(n))^\beta}$ *converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).*

Remarque : A part dans le cas où $\alpha = 1$, l'astuce est donc de multiplier par $n^{\frac{\alpha+1}{2}}$. Mais pourquoi $\frac{\alpha+1}{2}$? Dans le cas $\alpha > 1$, si on multiplie par n^γ au lieu de $n^{\frac{\alpha+1}{2}}$, on voit que deux conditions sont requises :

- $n^\gamma u_n = \frac{1}{n^{\alpha-\gamma}(\ln(n))^\beta} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$. Il faut donc que $\alpha - \gamma > 0$, i.e. $\gamma < \alpha$.
- $\sum \frac{1}{n^\gamma}$ converge. Il faut donc que $\gamma > 1$.

Le choix le plus immédiat de réel γ compris entre 1 et α est bien le milieu du segment $[1\,;\alpha]$, i.e. $\frac{\alpha+1}{2}$.

2) Séries géométriques

On peut, au choix, considérer la série $\sum nq^{n-1}$ comme étant définie à partir du rang 1, ou à partir du rang 0 mais avec un premier terme nul. De même pour $\sum n(n-1)q^{n-2}$: on peut la considérer comme définie à partir du rang 2, ou à partir du rang 0 mais avec ses deux premiers termes nuls.

Théorème. *Les séries $\sum q^n, \sum nq^{n-1}$ et $\sum n(n-1)q^{n-2}$ convergent si et seulement si $|q| < 1$ et on a alors :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2},$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}.$$

Remarque : Les séries $\sum q^n, \sum nq^{n-1}$ et $\sum n(n-1)q^{n-2}$ sont respectivement appelées série géométrique, série géométrique dérivée et série géométrique dérivée seconde de raison q. D'ailleurs, on peut remarquer que les valeurs sont aussi obtenues par dérivations successives. Attention, ce n'est qu'un moyen mnémotechnique (on rappelle que, dans le cadre du programme, on ne peut pas dériver une somme infinie terme à terme) !

Démonstration.

□

La méthode est classique : il suffit de voir que

$$n^2 = n(n-1) + n$$

et on se ramène à des séries géométriques dérives.

Exemple : *Montrer que la série $\sum \frac{2n^2+3n+1}{6^n}$ converge et calculer sa somme.*

On fera ce genre de calculs quand on calculera la variance d'une loi géométrique : cf. chapitre 29.

3) Série exponentielle

a) Convergence de la série exponentielle

Théorème. *Soit $x \in \mathbb{R}$. La série $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge et $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.*

Et donc elle converge absolument puisque $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge et a pour somme $e^{|x|}$.

DÉMONSTRATION. Déjà faite dans le chapitre 22. □

Exemples :

Exemple : *Montrer que la série $\sum \frac{3n^2+n+5}{n!} \times 7^n$ converge et calculer sa somme.*

Il faut penser à la série exponentielle car il y a de la factorielle au dénominateur. L'idée est de procéder à des simplifications successives à l'aide des égalités suivantes :

$$\forall n \geqslant 1, \ \frac{n}{n!} = \frac{1}{(n-1)!}$$

et, pour tout $n \geqslant 2$,

$$\frac{n(n-1)}{n!} = \frac{1}{(n-2)!}$$

Pour faire apparaître celle-ci, on écrit

$$n^2 = n(n-1) + n.$$

Ces égalités n'étant valables que pour $n \geqslant 2$, on doit isoler les termes $n=0$ et $n=1$ dans le calcul de la somme.

b) Définition de la fonction exponentielle

Jusqu'à présent, on a admis l'existence d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant les conditions $f(0) = 1$ et $f' = f$. On en a déduit des propriétés de f (stricte positivité, stricte croissance, etc.) pour finalement arriver à une somme de série

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

On peut voir ceci comme la (longue) partie analyse d'un raisonnement par analyse-synthèse : si une telle fonction existe, c'est la fonction $f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$. Faisons à présent la synthèse : montrons que la fonction ci-dessus est bien définie, dérivable et vérifie $f(0) = 1$ et $f' = f$.