Chapitre 23

Analyse asymptotique et développements limités

Dans ce chapitre, nous revoyons les notions de suites et fonctions négligeables et suites et fonctions équivalentes. Nous ajoutons d'autres propriétés dont les liens entre les deux notions. La dernière partie est consacrée aux développements limités.

I Comparaison de suites

On se donne des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont les termes sont tous non nuls à partir d'un certain rang.

1) Rappels sur les suites négligeables

De plus on écrit $u_n = \mathrm{o}(v_n)$ et jamais $\mathrm{o}(v_n) = u_n$.

Définition. *On dit que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est négligeable devant* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *si* $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. *On note alors* $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ *ou, plus simplement,* $u_n = o(v_n)$, *et on dit que* u_n *est un « petit o » de* v_n.

Exemples :

Dans le cas (rare en pratique) où une infinité des termes de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont nuls (la négation du fait qu'ils sont non nuls à partir d'un certain rang), une définition plus générale est la suivante : on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant \varepsilon |v_n|$.

- *Si* $0 < \alpha < \beta$, $n^{\alpha-\beta} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ *donc* $\dfrac{n^\alpha}{n^\beta} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ *et* $\dfrac{1/n^\beta}{1/n^\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
  En d'autres termes, $n^\alpha = o\left(n^\beta\right)$ *et* $\dfrac{1}{n^\beta} = o\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$.
- *Autre écriture des croissances comparées vues au chapitre 8 : pour tous* α, γ *strictement positifs et pour tout* q *tel que* $|q| > 1$,
  $$(\ln(n))^\gamma = o(n^\alpha), \qquad n^\alpha = o(q^n), \qquad q^n = o(n!) \qquad \text{et} \qquad n! = o(n^n).$$
- *On a également, si* α *et* γ *sont strictement positifs et* q *est tel que* $|q| < 1$ *:*
  $$\frac{1}{n^n} = o\left(\frac{1}{n!}\right), \quad \frac{1}{n!} = o(q^n), \quad q^n = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \quad \text{et} \quad \frac{1}{n^\alpha} = o\left(\frac{1}{(\ln(n))^\gamma}\right).$$

Interprétation :

Cette interprétation n'est pas rigoureuse ! Justement, la notation o permet de définir rigoureusement les notions écrites entre guillemets.

- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers $+\infty$, alors $u_n = \mathrm{o}(v_n)$ quand « $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ plus vite que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ». Par exemple (voir ci-dessus), $n = \mathrm{o}\left(n^2\right)$. Ci-dessous, parmi les suites usuelles, on range celles qui tendent vers $+\infty$ (en valeur absolue pour $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$) « de la plus lente à la plus rapide » (et donc, chaque suite est négligeable devant celles situées à sa droite) :

$(\ln(n))^\gamma$	n^α	n^β	q^n	$n!$	n^n	$+\infty$
$0 < \gamma$	$0 < \alpha < \beta$		$1 < \lvert q\rvert$			

Quand on parle de suites négligeables, les suites ne tendent pas forcément vers 0 ou $+\infty$ comme les exemples ci-contre pourraient le laisser penser. Par exemple (voir page suivante), $(-1)^n = \mathrm{o}\,(n)$.

- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers 0, alors $u_n = \mathrm{o}\,(v_n)$ quand « $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 plus vite que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ». Par exemple (voir ci-dessus), $\dfrac{1}{n^2} = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$. Ci-dessous, parmi les suites usuelles, on range celles qui tendent vers 0 « de la plus lente à la plus rapide » (et donc, chaque suite est négligeable devant celles situées à sa droite) :

$$0 \quad \frac{1}{n^n} \quad \frac{1}{n!} \quad \underset{|q|<1}{q^n} \quad \frac{1}{n^\beta} \quad \frac{1}{n^\alpha} \quad \frac{1}{(\ln(n))^\gamma}$$

$$0 < \alpha < \beta$$

Proposition.

- $u_n = o\,(1)$ *si et seulement si* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
- *(transitivité) Si* $u_n = o\,(v_n)$ *et* $v_n = o\,(w_n)$, *alors* $u_n = o\,(w_n)$.
- *Si* $u_n = o\,(v_n)$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}^*$, *alors* $\lambda u_n = o\,(v_n)$ *et* $u_n = o\,(\lambda v_n)$.
- *Si* $u_n = o\,(v_n)$ *alors* $u_n \times w_n = o\,(v_n \times w_n)$.
- *Si* $u_n = o\,(v_n)$ *et* $w_n = o\,(x_n)$ *alors* $u_n \times w_n = o\,(v_n \times x_n)$.
- *Si* $u_n = o\,(w_n)$ *et* $v_n = o\,(w_n)$, *alors* $u_n + v_n = o\,(w_n)$.

En résumé, si $\lambda \neq 0$,

$$\begin{gathered} o(o(u_n)) = o(u_n) \\ \lambda o(u_n) = o(\lambda u_n) = o(u_n) \\ v_n \times o(u_n) = o(v_n u_n) \\ o(u_n) \times o(v_n) = o(u_n v_n) \\ o(u_n) \pm o(u_n) = o(u_n) \\ o(u_n) \pm o(v_n) = ??? \end{gathered}$$

Plusieurs dangers :

- La notation o (appelée notation de Landau) repose sur un abus d'écriture : $\mathrm{o}\,(v_n)$ ne désigne pas une suite fixée mais n'importe quelle suite négligeable devant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En particulier :
  - Si $u_n = \mathrm{o}\,(v_n)$ et $w_n = \mathrm{o}\,(v_n)$, alors on a pas forcément $u_n = v_n$ (ni même pour n assez grand).
  - Si $u_n = \mathrm{o}\,(w_n)$ et $v_n = \mathrm{o}\,(w_n)$, alors $u_n - v_n = \mathrm{o}\,(w_n)$, surtout pas 0 ! En effet $-v_n = \mathrm{o}\,(w_n)$ et donc $u_n - v_n = u_n + (-v_n) = \mathrm{o}\,(w_n)$. Autrement dit, lorsque l'on soustrait deux suites qui sont négligeables devant w_n, alors on obtient une suite négligeable devant w_n : c'est tout ce qu'on peut dire.
- On n'écrit JAMAIS $u_n = \mathrm{o}\,(0)$: ça n'a aucun sens !
- On ne peut pas sommer deux petits o différents... du moins il n'y a pas de formule générale. Nous verrons comment contourner ce problème dans les prochains paragraphes.

On rencontrera aussi les notations

$$u_n = v_n + o(w_n)$$

pour dire que

$$u_n = v_n + \varepsilon_n$$

avec $\varepsilon_n = o(w_n)$. Cela revient encore à dire que

$$u_n - v_n = o(w_n).$$

Il existe une multitudes de propriétés sur les suites négligeables et il serait fastidieux d'être exhaustif et de toutes les retenir : au moindre doute, on refait la démonstration au brouillon. C'est souvent immédiat !

Quelques exemples :

- *Si* $u_n = o\,(v_n)$ *et* $\alpha \in \mathbb{R}^*$ *tels que* u_n^α *et* v_n^α *existent pour* n *assez grand. A-t-on* $u_n^\alpha = o\,(v_n^\alpha)$ *?*

  Formons le quotient : on sait que $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ *par hypothèse.*

  * *Si* $\alpha > 0$, $\dfrac{u_n^\alpha}{v_n^\alpha} = \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)^\alpha \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0^\alpha$ *par continuité de* $x \longmapsto x^\alpha$ *en* 0. *Autrement dit* $u_n^\alpha = o\,(v_n^\alpha)$.
  * *Si* $\alpha < 0$, $\dfrac{v_n^\alpha}{u_n^\alpha} = \left(\dfrac{v_n}{u_n}\right)^\alpha \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ *car* $x^\alpha \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ *et* $\dfrac{v_n}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. *Autrement dit* $v_n^\alpha = o\,(u_n^\alpha)$. *C'est le contraire donc !*

— *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et si $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pm\infty$, alors $u_n = o(v_n)$. En effet il existe alors $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $|v_n| > 0$. De plus, par hypothèse, il existe M tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant M$. Soit $n \geqslant n_0$. Puisque $|v_n| > 0$, on obtient $\left|\dfrac{u_n}{v_n}\right| \leqslant \dfrac{M}{|v_n|}$. Comme $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, on a $\dfrac{M}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et on conclut avec le théorème d'encadrement.*

2) Rappels sur les suites équivalentes

Dans le cas (rare en pratique) où une infinité des termes de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont nuls (la négation du fait qu'ils sont non nuls à partir d'un certain rang), une définition plus générale est la suivante : on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - v_n| \leqslant \varepsilon |v_n|$.

Définition. *On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont équivalentes si $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. On notera $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ ou, plus simplement, $u_n \sim v_n$.*

Interprétation (⚠ peu rigoureuse ici aussi !) : $u_n \sim v_n$ quand « $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont à peu près de la même taille ».

⚠ On n'écrit jamais $u_n \sim 0$: cela n'a aucun sens !

Proposition. *Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on a les équivalents suivants :*

- $\sin(u_n) \sim u_n$
- $\tan(u_n) \sim u_n$
- $\ln(1 + u_n) \sim u_n$
- $\mathrm{Arctan}(u_n) \sim u_n$
- $e^{u_n} \sim 1$
- $e^{u_n} - 1 \sim u_n$
- $\cos(u_n) \sim 1$
- $(1 + u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$ *avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$, fixe*
- $\cos(u_n) - 1 \sim \dfrac{-u_n^2}{2}$

⚠ C'est faux si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 ! Il ne faut donc pas oublier de le vérifier.

Proposition. *Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $q < p$. Soient $a_q, \dots, a_p$ des réels tels que $a_q \neq 0$ et $a_q \neq 0$. Alors*

$$\sum_{k=q}^{p} a_k n^k \sim a_p n^p \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=q}^{p} \frac{a_k}{n^k} \sim \frac{a_q}{n^q}.$$

Une suite polynomiale est équivalente à son terme de plus haut degré. Attention si c'est un polynôme en $\dfrac{1}{n}$, c'est équivalent au terme de plus bas degré.

Proposition.

- *(réflexivité) $u_n \sim u_n$.*
- *(symétrie) Si $u_n \sim v_n$ alors $v_n \sim u_n$.*
- *(transitivité) Si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$ alors $u_n \sim w_n$.*
- *Si $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim t_n$ alors $u_n \times w_n \sim v_n \times t_n$.*
- *Si $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim t_n$ alors $\dfrac{u_n}{w_n} \sim \dfrac{v_n}{t_n}$.*
- *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que u_n^α et v_n^α sont bien définis pour n assez grand. Si $u_n \sim v_n$ alors $u_n^\alpha \sim {v_n}^\alpha$.*

⚠ Les constantes non nulles ne disparaissent pas dans les $\sim$ contrairement aux o.

⚠ α soit être FIXE !

Il existe une multitudes de propriétés sur les suites équivalentes et il serait fastidieux d'être exhaustif et de toutes les retenir : au moindre doute, on refait la démonstration au brouillon.

Par exemple, si $u_n \sim v_n$, alors $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc, pour tout n assez grand, $\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{u_n}{v_n} \leqslant 2$. Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont de même signe à partir d'un certain rang.

⚠ De même signe ne veut pas dire de signe constant ! Par exemple, $\dfrac{(-1)^n}{n+1} \sim \dfrac{(-1)^n}{n}$.

Méfiance cependant avec des propriétés qui pourraient sembler intuitives mais qui sont fausses. Par exemple deux suites équivalentes ne sont pas forcément de même monotonie, même à partir d'un certain rang.

Par exemple $1+\frac{1}{n} \sim 1-\frac{1}{n}$ *alors que* $(1-\frac{1}{n})_{n\geqslant 1}$ *est décroissante et* $(1+\frac{1}{n})_{n\geqslant 1}$ *est croissante.*

Autrement dit, deux suites équivalentes ont nécessairement la même limite, sous réserve d'existence. Mais la réciproque est fausse en général :

- deux suites ayant une même limite **réelle non nulle** sont équivalentes.
- deux suites ayant une limite infinie ou nulle ne sont pas forcément équivalentes (cf. chapitre 8 pour des contre-exemples).

Proposition (Liens avec les limites).

- *Si* $u_n \sim v_n$ *et si* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ *alors* $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$.
- *Soit* $L \in \mathbb{R}^*$. *Alors* $u_n \sim L$ *si et seulement si* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$.
- *Soit* $L \in \mathbb{R}^*$. *Si* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$ *et* $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$ *alors* $u_n \sim v_n$.

3) Liens entre $\sim$ et o

a) Suite équivalente à une suite négligeable devant une autre

Proposition. *Si* $u_n = o(v_n)$ *et si* $v_n \sim w_n$ *alors* $u_n = o(w_n)$.

Démonstration. $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\dfrac{v_n}{w_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc $\dfrac{u_n}{w_n} = \dfrac{u_n}{v_n}\dfrac{v_n}{w_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$ □

Exemple :

En d'autres termes, dans le o, on ne garde que le terme prédominant. Comme pour les constantes multiplicatives, on ne garde pas les termes suivants car ils sont superflus : seul compte l'ordre de grandeur.

Proposition. *Si* $u_n \sim v_n$ *et* $v_n = o(w_n)$ *alors* $u_n = o(w_n)$.

Démonstration. $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et $\dfrac{v_n}{w_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\dfrac{u_n}{w_n} = \dfrac{u_n}{v_n}\dfrac{v_n}{w_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$ □

b) Réécriture de $\sim$ avec des o

Attention, même si $u_n \sim v_n$, on n'a pas forcément $u_n - v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$! Par exemple, $n^2 \sim n^2+n$ mais la différence tend vers $+\infty$! Cependant, on a le résultat fondamental suivant :

C'est intuitif ! Deux suites sont « à peu près égales » si et seulement si la différence est négligeable devant ces mêmes suites. L'intérêt de ce théorème est qu'on peut alors écrire que $u_n \sim v_n$ si et seulement si

$$u_n = v_n + o(v_n)$$

c'est-à-dire qu'une somme de deux termes, dont l'un négligeable devant l'autre, est équivalente au terme prédominant (là aussi c'est intuitif).

Théorème. $u_n \sim v_n \iff u_n - v_n = o(v_n) \iff u_n - v_n = o(u_n)$.

Démonstration.

□

Remarques :

- De manière générale, les notations o et $\sim$ sont utiles pour formaliser des approximations. Par exemple, écrire « $n+1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} n$ » est une horreur ignoble mais écrire $n+1 \sim n$ est tout-à-fait rigoureux.

L'avantage de cette écriture est qu'on peut l'utiliser dans les calculs car le o vérifie des propriétés que ne vérifie par forcément l'équivalent (voir paragraphe suivant).

Dans la remarque de la page suivante, c'est à cette interprétation qu'on fait référence.

- Et si on veut plusieurs termes ? On utilise un o. Par exemple, écrire

$$\cos\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{2n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

signifie que

$$\cos\left(\frac{1}{n}\right) - \left(1 - \frac{1}{2n^2}\right) = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

c'est-à-dire que $\cos\left(\frac{1}{n}\right)$ est à peu près égal à $\left(1 - \frac{1}{2n^2}\right)$ et que l'erreur commise en faisant cette approximation est négligeable devant $1/n^2$ c'est-à-dire devant le dernier terme de l'approximation. C'est le principe du développement limité et du développement asymptotique (cf. paragraphe III).

- Pourquoi préfère-t-on écrire $\cos\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{2n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ plutôt que $\cos\left(\frac{1}{n}\right) \sim 1 - \frac{1}{2n^2}$? Cette écriture est correcte mais écrire des équivalents à plus d'un terme est déconseillé voire interdit. Prenons un autre exemple d'équivalent à plus d'un terme pour que cela soit plus parlant.

  Écrire $\cos\left(\frac{1}{n}\right) \sim 1 + \frac{1}{n}$ est

  — **correct :** le quotient tend bien vers 1.

  — **totalement inutile :** on peut tout aussi bien écrire $\cos\left(\frac{1}{n}\right) \sim 1 + \frac{\pi^2}{n^{1789}}$ et ce sera tout aussi correct. En effet, le deuxième terme n'apporte aucune information.

  — **dangereux :** on a envie d'en déduire que $\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \sim \frac{1}{n}$ ce qui est **faux** !

⚠ Morale de l'histoire : Un terme seulement dans un équivalent. Quand on veut en mettre plusieurs, pour avoir une meilleure approximation, on utilise un o.

4) Opérations illégales sur les équivalents

On a vu que l'on pouvait multiplier les équivalents, former leur quotient et les passer à des puissances fixes.

a) Opérations illégales

(i) La somme

⚠ Si $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim t_n$, on n'a pas forcément $u_n + w_n \sim v_n + t_n$.

Par exemple, $1 + \frac{1}{n} \sim 1 + \frac{1}{n^2}$ *et* $-1 + \frac{1}{n} \sim -1$ *mais* $\frac{2}{n}$ *n'est pas équivalent à* $\frac{1}{n^2}$.

(ii) Le passage à une fonction (même continue)

⚠ Si $u_n \sim v_n$ et si f est continue , on n'a pas forcément $f(u_n) \sim f(v_n)$.

Par exemple, $n + 1 \sim n$ *mais* e^{n+1} *n'est pas équivalent à* e^n *(car le quotient ne tend pas vers* 1 *mais vers* e*).*

On peut composer les limites par une fonction continue (cf. chapitre 13), c'est pour cela que composer un équivalent par une fonction continue est une erreur fréquente. Le passage à la fonction non continue est également une opération illégale mais c'est une erreur moins fréquente : d'une part, on manipule moins souvent des fonctions non continues, d'autre part on sait que c'est faux pour les limites, donc on est moins tenté de le faire pour les équivalents.

(iii) L'élévation à une puissance variable

⚠ Si $u_n \sim w_n$, on n'a pas forcément $u_n^{v_n} \sim w_n^{v_n}$.

Par exemple, $1 + \frac{1}{n} \sim 1$ *mais* $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ *n'est pas équivalent à* $1^n = 1$ *puisque* $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e$ *(c'est l'immense classique vu dans les chapitres 8 et 13).*

b) Comment contourner la loi

(i) Pour la somme

Pour sommer des équivalents, on les réécrit avec des o (c'est-à-dire en utilisant le théorème vu en III.3).

Exemple : *Posons* $u_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ *et* $v_n = \tan\left(\frac{1}{n}\right)$*. Donnons un équivalent de* $u_n + v_n$*.*

On peut sommer les mêmes o, mais que faire quand on a des o différents ? On garde « le plus gros ». Voyons avec un exemple :

Exemple : *Posons* $u_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ *et* $v_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$*.*
Donnons un équivalent de $u_n + v_n$*.*

Cependant, en pratique, cela ne se passe pas toujours aussi bien :

Exemple : *Peut-on, avec nos outils actuels, donner un équivalent de* $u_n = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ *?*

On ne peut pas donner un équivalent de u_n*. Il faut une plus grande précision dans l'approximation du* $\ln$ *: cf. paragraphe III ;*

Remarque : On voit qu'il y a une différence de méthode selon qu'on veut donner l'équivalent d'un produit, d'un quotient, ou d'une somme :

- Pour un produit, il suffit de donner un équivalent de chacun des termes du produit.
- Pour un quotient, il suffit de donner un équivalent du numérateur et du dénominateur.
- Pour une somme : on écrit chaque équivalent avec un o (toujours à l'aide du théorème du II.4) et on garde le terme prédominant. On ne somme pas les équivalents !

En effet, l'équivalent passe au produit, au quotient, mais pas à la somme !

(ii) Pour le passage à la fonction (même continue)

On rappelle que les équivalents ne passent pas à la fonction continue. Cependant, certains cas de figure se produisent fréquemment, et là aussi, il faut savoir contourner la loi.

- **Cas particulier d'un équivalent à une constante non nulle :** Si $u_n \sim L$ avec $L \in \mathbb{R}^*$, alors on a $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$. Or le passage à la fonction continue dans une limite est permis : si f est continue en L, alors $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(L)$. Si $f(L) \neq 0$, alors on en déduit que $f(u_n) \sim f(L)$.

  Exemple :

- **Cas particulier du logarithme népérien :** On fait comme au premier semestre et on factorise par le terme prédominant dans le logarithme..

  Exemple : *Donner un équivalent de* $u_n = \ln\left(2n^2 + 5n + 1000\ln(n) + 3\right)$.

Si bien sûr passer au logarithme à un sens...

Un autre cas peut se produire : si on a $u_n \sim v_n$ et si on veut appliquer la fonction $\ln$, on écrit

$$\ln(u_n) = \ln(v_n + \mathrm{o}(v_n)) = \ln\left(v_n(1 + \mathrm{o}(1))\right) = \ln(v_n) + \ln(1 + \mathrm{o}(1)).$$

Il faut reproduire ce raisonnement systématiquement dans le cas particulier que vous rencontrez : ce n'est pas un résultat du cours. Attention cela ne fonctionne pas si $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge mais pas vers 1, alors

$$\frac{\ln(u_n)}{\ln(v_n)} = 1 + \frac{\ln(1 + \mathrm{o}(1))}{\ln(v_n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

et donc $\ln(u_n) \sim \ln(v_n)$.

Exemple : *On admet la formule de Stirling : Déterminons un équivalent de* $\ln(n!)$.

La formule de Stirling est classique mais hors-programme (elle sera systématiquement rappelée si nécessaire). Cf. chapitre 24 pour la démonstration

Exemple : *Donner un équivalent de* $u_n = \ln\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$.

- **Composition de plusieurs équivalents usuels :** Il suffit de procéder de gauche à droite au lieu de droite à gauche.

  Exemple : *Déterminons un équivalent simple de* $\sin\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{n}\right)\right)$.

On peut commencer par dire que, puisque $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, alors $\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$. Mais attention on ne peut pas composer les équivalents par la fonction $\sin$.

(iii) Pour l'élévation à une puissance variable.

C'est un réflexe absolu à avoir !

Si on a une suite du type $u_n^{v_n}$, on commence toujours par l'écrire sous la forme

$$u_n^{v_n} = \exp\left(v_n \ln(u_n)\right)$$

et on se retrouve donc avec des compositions (cf. paragraphe précédent).

(iv) Et sinon ?

Dans les autres cas où aucun théorème ne s'applique, on revient à la définition (c'est-à-dire former le quotient et montrer qu'il tend vers 1).

II Comparaison de fonctions

Dans cette partie et la suivante, on se donne D une union d'intervalles non vides, non réduits à un point et a un élément ou une borne de D, éventuellement infinie. Si rien n'est précisé, f, g, h sont trois fonctions définies sur D à valeurs dans $\mathbb{R}$ et qui ne s'annulent pas au voisinage de a, sauf éventuellement en a (par exemple, on pourra étudier la fonction sinus, qui ne s'annule pas au voisinage de 0, sauf en 0). Enfin, toutes les limites seront prises quand x tend vers a.

1) Rappels

Une définition plus générale est la suivante : on dit que f est négligeable devant g au voisinage de a si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in D \cap]a-\delta\,;a+\delta[$, $|f(x)| \leqslant \varepsilon |g(x)|$.

Définition. *On dit que f est négligeable devant g au voisinage de a si* $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 0$.
On note $f(x) \underset{x\to a}{=} o\left(g(x)\right)$ *ou* $f(x) = o\left(g(x)\right)$ *si aucune confusion n'est possible.*

Exemple : *Autre écriture des croissances comparées vues au premier semestre : pour tous* $\alpha > 0$ *et* $\beta > 0$,

- $\ln(x)^\beta \underset{x\to+\infty}{=} o(x^\alpha)$,
- $|\ln(x)|^\beta \underset{x\to 0^+}{=} o\left(\dfrac{1}{x^\alpha}\right)$,
- $x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o\left(e^{\beta x}\right)$,
- $e^{-\beta x} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^\alpha}\right)$,
- $\dfrac{1}{x^\alpha} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{\ln(x)^\beta}\right)$,
- $e^{\beta x} \underset{x\to-\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{|x|^\alpha}\right)$.

De même que pour les suites, si f et g tendent vers $\pm\infty$, $f(x) = \mathrm{o}(g(x))$ signifie que « g tend vers $\pm\infty$ plus vite que f » tandis que si f et g tendent vers 0, $f(x) = \mathrm{o}(g(x))$ signifie que « f tend vers 0 plus vite que g ».

⚠ Le petit o « dépend de l'endroit où on se trouve » : un petit o au voisinage de $+\infty$ ne sera plus forcément valable au voisinage de 0, et réciproquement.

Par exemple, si $\beta > \alpha > 0$, *alors :*

— $\dfrac{1}{x^\beta} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^\alpha}\right)$ *et* $x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o\left(x^\beta\right)$

— $\dfrac{1}{x^\alpha} \underset{x\to 0}{=} o\left(\dfrac{1}{x^\beta}\right)$ *et* $x^\beta \underset{x\to 0}{=} o\left(x^\alpha\right)$.

a) Fonctions équivalentes

Définition. *On dit que* f *et* g *sont équivalentes au voisinage de* a *si* $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 1$. *On note* $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ *ou* $f(x) \sim g(x)$ *si aucune confusion n'est possible.*

Une définition plus générale est la suivante : on dit que f est équivalente à g au voisinage de a si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in D \cap \,]a-\delta\,;a+\delta[$, $|f(x) - g(x)| \leqslant \varepsilon |g(x)|$.

Proposition.

- $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$
- $\tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$
- $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$
- $\mathrm{Arctan}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$
- $e^x \underset{x\to 0}{\sim} 1$
- $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$
- $(1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x$ *avec* $\alpha \in \mathbb{R}^*$, *fixe*
- $\cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} 1$
- $\cos(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}$

C'est la même démonstration que pour les suites. Par ailleurs ces équivalents seront immédiats quand on aura vu les DL, cf. paragraphe III.

Proposition. *Soit* $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ *tel que* $q < p$. *Soient* $a_q, \dots, a_p$ *des réels tels que* $a_q \neq 0$ *et* $a_q \neq 0$. *Alors*

$$\sum_{k=q}^{p} a_k x^k \underset{x\to+\infty}{\sim} a_p x^p \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=q}^{p} a_k x^k \underset{x\to 0}{\sim} a_q x^q.$$

⚠ L'équivalent « dépend de l'endroit où on se trouve » : un équivalent au voisinage de $+\infty$ ne sera plus forcément valable au voisinage de 0, et réciproquement.

Exemples :

- $\dfrac{\ln(1+x)}{\ln(x)} = \dfrac{\ln(x(1+1/x))}{\ln(x)} = 1 + \dfrac{\ln(1+1/x)}{\ln(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$.
  Ainsi $\ln(1+x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x)$. *Tandis que* $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$.
- $x + \ln(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x$ *par croissances comparées. Tandis que* $x + \ln(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \ln(x)$ *par quotient.*

2) Propriétés

Les propriétés sont toutes identiques à celles pour les suites, avec $x \to a$ à la place de $n \to +\infty$, $f(x)$ à la place de u_n, etc. et en adaptant les démonstrations.

Par théorème de composition d'une suite ou une fonction par une fonction, on a aussi :

On parle parfois de « composition à droite » au lieu de substitution.
⚠ Ne pas confondre avec la « composition à gauche », appelée aussi « passage à la fonction »

Proposition (substitution dans les o). *Supposons que* $f(x) \underset{x \to a}{=} o(g(x))$.

- *Si* u *est une fonction définie au voisinage de* $b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ *telle que* $u(t) \xrightarrow[t \to b]{} a$, *alors* $f(u(t)) \underset{t \to b}{=} o(g(u(t)))$.
- *Si* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite telle que* $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} a$, *alors* $f(u_n) \underset{n \to +\infty}{=} o(g(u_n))$.

Proposition (substitution dans les équivalents). *Supposons que* $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$.

- *Si* u *est une fonction définie au voisinage de* $b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ *telle que* $u(t) \xrightarrow[t \to b]{} a$, *alors* $f(u(t)) \underset{t \to b}{\sim} g(u(t))$.
- *Si* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite telle que* $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} a$, *alors* $f(u_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} g(u_n)$.

Exemples :

III Développements Limités

Dans cette partie, sauf indication contraire (par exemple dans le paragraphe III.5), on suppose que f est une fonction définie sur un intervalle I, non vide, non réduit à un point, et que 0 appartient à I. De plus (toujours sauf indication contraire), les limites, équivalents etc. sont tous au voisinage de 0. On se donne enfin $n \in \mathbb{N}$.

1) Introduction et définitions

On rappelle qu'on se place au voisinage de 0.

On a vu les équivalents suivants :

- $\sin(x) \sim x$,
- $\operatorname{Arctan}(x) \sim x$,
- $e^x - 1 \sim x$,
- $\ln(1+x) \sim x$,
- $\sqrt{1+x} - 1 \sim \dfrac{x}{2}$,
- $\cos(x) - 1 \sim -\dfrac{x^2}{2}$.

On peut écrire les trois derniers sous la forme suivante :

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + \mathrm{o}(x), \quad e^x = 1 + x + \mathrm{o}(x) \quad \text{et} \quad \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}\left(x^2\right)$$

On a ainsi une approximation simple (un polynôme) de $\cos, \exp$ etc. au voisinage de 0. Cela permet par exemple de donner une valeur approchée de $\cos(x)$, ainsi que de lever des indéterminations. Cependant, ces approximations peuvent s'avérer insuffisants : cf. paragraphe I.4.b. Peut-on obtenir des termes supplémentaires, pour obtenir une approximation encore meilleure ?

Rappelons qu'au voisinage de 0, si $\alpha < \beta$, alors $x^\beta = \mathrm{o}(x^\alpha)$. Ainsi, les puissances dans le DL sont rangées de « la plus importante à la plus négligeable » : chaque terme est négligeable devant les précédents.

Définition. *On dit que f admet un développement limité (DL) à l'ordre n au voisinage de 0 (ou en 0) s'il existe $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que :*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \mathrm{o}(x^n).$$

Remarques :

- Intuitivement, f admet un DL à l'ordre n en 0 s'il existe un polynôme de degré inférieur ou égal à n « proche de f » au voisinage de 0. S'il existe, ce polynôme est la meilleure approximation de f par un polynôme de degré n puisque l'erreur commise en faisant l'approximation est négligeable devant x^n.
- Une fonction admettant un DL au voisinage de 0 est équivalente en 0 au premier terme non nul de son DL (c'est l'un des intérêt des DL d'ailleurs comme nous le verrons dans les exemples de cette partie).

2) Premiers exemples

Exemples :

C'est-à-dire que :
• $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$ admet un DL à l'ordre n en 0 avec $a_k = 1$ pour tout $k \in [\![0\,;n]\!]$.
• $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$ admet un DL à l'ordre n en 0 avec $a_k = (-1)^k$ pour tout $k \in [\![0\,;n]\!]$.

Théorème. *Les fonctions $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$ et $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$ admettent des DL en 0 à tout ordre et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :*

- $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o\left(x^n\right)$.
- $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o\left(x^n\right)$.

Démonstration.

□

3) Premières propriétés

a) Unicité du DL

Proposition (unicité du DL). *Si f admet un DL à l'ordre n au voisinage de 0, celui-ci est unique.*

Attention, on rappelle qu'on ne peut pas simplifier les o ! En particulier, on ne peut pas affirmer que $a_0 + a_1 x + \cdots + x_n x^n = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n$ au voisinage de 0 !

Démonstration. Soient $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(b_0, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + x_n x^n + o\left(x^n\right) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n + o\left(x^n\right)$$

Supposons qu'il existe $i \in [\![0\,;n]\!]$ tel que $a_i \neq b_i$. Soit $k = \min\{i | a_i \neq b_i\}$. Alors $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \ldots a_{k-1} = b_{k-1}$, si bien que

$$a_k x^k + \underbrace{a_{k+1} x^{k+1} + \cdots + a_n x^n + o\left(x^n\right)}_{=o\left(x^k\right)} = b_k x^k + \underbrace{b_{k+1} x^{k+1} + \cdots + b_n x^n + o\left(x^n\right)}_{=o\left(x^k\right)}.$$

Ainsi, $a_k x^k + o\left(x^k\right) = b_k x^k + o\left(x^k\right)$ donc $a_k + o(1) = b_k + o(1)$, et finalement $a_k - b_k = o(1)$, c'est-à-dire que $a_k - b_k \xrightarrow[x \to 0]{} 0$. Or, $a_k - b_k$ est une constante non nulle, ce qui est absurde. En conclusion, $a_i = b_i$ pour tout $i \in [\![0\,;n]\!]$. □

b) CNS d'existence d'un DL aux ordres 0 et 1

Proposition. *Si f admet un DL à l'ordre n alors, pour tout $p \leqslant n$, f admet un DL à l'ordre p.*

En particulier, le DL à l'ordre p est le DL à l'ordre n, tronqué à l'ordre p.

Démonstration. Soit $p \in \mathbb{N}$. Il existe $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_p x^p + \underbrace{a_{p+1} x^{p+1} + \cdots + a_n x^n + o\left(x^n\right)}_{=o\left(x^p\right)}$$

ce qui permet de conclure. □

Proposition. *La fonction f admet un DL à l'ordre 0 en 0 si et seulement si f est continue en 0, et alors $a_0 = f(0)$.*

On donnera parfois le DL de fonctions non continues en 0, par exemple $f : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x+x^2}$.. Cela ne contredit pas le résultat ci-contre car elles ne sont pas définies en 0. L'existence d'un DL à l'ordre 0 implique alors qu'elles sont prolongeables par continuité en 0.

Démonstration.

- Si f est continue en 0, alors $f(x)-f(0) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$, c'est-à-dire que $f(x)-f(0) = \text{o}\,(1)$. Ainsi, $f(x) = f(0) + \text{o}\,(1)$: f admet un DL à l'ordre 0 et $a_0 = f(0)$.
- Réciproquement, supposons que f admette un DL à l'ordre 0 en 0. Il existe donc $a_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = a_0 + \text{o}\,(1)$. Ainsi, $f(x) \xrightarrow[x \to 0]{} a_0$. Comme f est définie en 0, si f admet une limite en 0, celle-ci est forcément égale à $f(0)$ (cf. chapitre 13), c'est-à-dire que $a_0 = f(0)$. Finalement, $f(x) \xrightarrow[x \to 0]{} f(0)$: f est continue en 0. □

Proposition. *La fonction f admet un DL à l'ordre 1 en 0 si et seulement si f est dérivable en 0, et alors $a_1 = f'(0)$.*

Démonstration.

- Si f admet un DL à l'ordre 1 en 0, alors il existe $(a_0, a_1) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(x) = a_0 + a_1 x + \text{o}\,(x)$. En particulier, f admet un DL à l'ordre 0 donc est continue en 0 et $a_0 = f(0)$. Ainsi, si $x \neq 0$,

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = a_1 + \text{o}\,(1) \xrightarrow[x \to 0]{} a_1.$$

  Ainsi f est dérivable en 0 et $f'(0) = a_1$.
- Réciproquement, supposons f dérivable en 0. Alors, pour tout $x \neq 0$,

$$\frac{f(x)-f(0)-xf'(0)}{x} = \frac{f(x)-f(0)}{x} - f'(0) \xrightarrow[x \to 0]{} f'(0) - f'(0) = 0.$$

  En d'autres termes, $f(x) - f(0) - xf'(0) = \text{o}\,(x)$. Nous en déduisons que $f(x) = f(0) + xf'(0) + \text{o}\,(x)$: f admet un DL à l'ordre 1. □

⚠ Si $n \geqslant 2$, il n'y a plus équivalence entre « être dérivable n fois » et « admettre un DL à l'ordre n ».

Par exemple, soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \longmapsto \begin{cases} x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

on encadre par $\pm|x|$.

Tout d'abord, si $x \neq 0$, $\dfrac{f(x)}{x^2} = x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ par encadrement. En d'autres termes, $f(x) = \text{o}\left(x^2\right)$ donc f admet un DL à l'ordre 2 (avec $a_0 = a_1 = a_2 = 0$). Montrons cependant que f n'est pas dérivable deux fois en 0. Tout d'abord, f admet un DL à l'ordre 2 donc admet un DL à l'ordre 1 donc est dérivable en 0 et $f'(0) = a_1 = 0$. De plus, si $x \neq 0$, $f'(x) = 3x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$, si bien que

$$\frac{f'(x)-f'(0)}{x} = 3x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

On pouvait aussi démontrer la dérivabilité de f en 0 à la main, avec un taux d'accroissement.

et, de même que dans le chapitre 13, on montre que cette quantité n'a pas de limite en 0 donc f' n'est pas dérivable en 0 : f n'est pas dérivable deux fois en 0.

4) Formule de Taylor-Young

Théorème (formule de Taylor-Young - admis). *Si f est de classe C^∞ au voisinage de 0, alors f admet un DL à tout ordre et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, son DL à l'ordre n est donné par :*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n)$$

Remarques :

- Autrement dit :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n).$$

- Encore une formule de Taylor ! Contrairement aux deux autres, celle-ci donne un résultat LOCAL, c'est-à-dire au voisinage d'un point. On ne peut pas s'en servir pour donner un encadrement ou le signe d'une fonction sur tout un intervalle, on utilise pour cela l'une des deux autres.

Précisons que les DL ci-contre sont donnés à l'ordre n pour l'exponentielle, le $\ln$ et la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$, à l'ordre $2n+1$ pour le sinus et à l'ordre $2n$ pour le cosinus.

Théorème. *Les fonctions* $\exp$, $x \longmapsto -\ln(1-x)$, $x \longmapsto \ln(1+x)$, $\sin$, $\cos$ *et* $x \longmapsto (1+x)^\alpha$ *(où α est un réel FIXE) admettent des DL en 0 à tout ordre et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :*

- $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + o(x^n).$
- $-\ln(1-x) = x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \cdots + \dfrac{x^n}{n} + o(x^n).$
- $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \cdots + \dfrac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + o(x^n).$
- $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \cdots + \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+1}\right).$
- $\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots + \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n}\right).$
- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$.

On verra les DL d'autres fonctions usuelles en TD. Les 6 précédents et ceux de $x \longmapsto \dfrac{1}{1 \pm x}$ sont les seuls à connaître par coeur.

Remarques :

- Les coefficients d'ordre pair du DL du sinus sont nuls. C'est le cas pour toutes les fonctions impaires admettant un DL (cf. TD n° 23). On aurait même pu écrire $o\left(x^{2n+2}\right)$ puisque le coefficient devant x^{2n+2} est nul.
- Les coefficients d'ordre impair du DL du sinus sont nuls. C'est le cas pour toutes les fonctions paires admettant un DL (cf. TD n° 23). On aurait même pu écrire $o\left(x^{2n+1}\right)$ puisque le coefficient devant x^{2n+1} est nul.

Démonstration. Ces cinq fonctions sont C^∞ donc, d'après la formule de Taylor-Young, elles admettent des DL à tout ordre. Ensuite, il suffit de calculer les dérivées successives, leur valeur en 0 et d'appliquer la formule de Taylor-Young.

- Pour l'exponentielle, le sinus et le cosinus, cela découle directement des calculs faits au paragraphe II.3.c du chapitre 22.
- Pour les fonctions $x \longmapsto -\ln(1-x)$ et $x \longmapsto \ln(1+x)$ cela découle du fait que (cf. chapitre précédent),

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \ln^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k}.$$

- Enfin, si on note $f : x \longmapsto (1+x)^\alpha$, par récurrence immédiate, pour tout $n \geqslant 0$ et pour tout $x > -1$, $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$ ce qui permet de conclure. $\square$

Exemples :

5) DL ailleurs qu'en 0

On ne s'intéresse en pratique qu'à des DL en 0 mais on peut définir exactement de la même manière des DL au voisinage d'un point $x_0 \in I$ quelconque : il suffit d'écrire $x - x_0$ à la place de x dans la définition du DL :

Définition. *Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Soit g une fonction définie sur un voisinage de x_0. On dit que g admet un développement limité à l'ordre n en x_0 si il existe $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que*

$$g(x) \underset{x_0}{=} a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n).$$

Pour abréger, on note $\mathrm{DL}_n(x_0)$ au lieu de *développement limité à l'ordre n en x_0*. Lorsqu'une fonction possède un $\mathrm{DL}_n(x_0)$, alors on se ramène toujours à un $\mathrm{DL}_n(0)$ (on fait le « changement de variable $x = x_0 + h$ ») :

Proposition. *La fonction g admet un $\mathrm{DL}_n(x_0)$ si et seulement si la fonction $f : h \longmapsto g(x_0 + h)$ admet un $\mathrm{DL}_n(0)$. Plus précisément,*

$$g(x) \underset{x \to x_0}{=} a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + o\big((x - x_0)^n\big)$$

si et seulement si

$$f(x) = g(x_0 + h) \underset{h \to 0}{=} a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n + o\big(h^n\big).$$

Exemple :

6) Opérations sur les DL

En clair, on peut sommer et multiplier les DL et effectuer des DL à d'autres quantités que x, la seule condition est que cette quantité tende vers 0 (mais il faut faire attention aux ordres). On se contentera de cette affirmation intuitive et informelle car l'écrire rigoureusement n'apporterait rien, et il est plus important de s'entraîner avec des exemples.

a) DL à d'autres quantités que x, substitution

On peut réécrire le DL (sous réserve d'existence) de f en 0 sous la forme :

$$f(u) \underset{u \to 0}{=} a_0 + a_1 u + \cdots + a_n u^n + \mathrm{o}\left(u^n\right)$$

Par conséquent, si on a une quantité qui tend vers 0 (ne pas oublier de le vérifier !), on peut substituer cette quantité à u.

Exemple : *Donner le DL à l'ordre 5 en 0 de* $\sin(2x)$.

Remarque : Il faut parfois réfléchir aux ordres en amont pour ne pas faire trop de calculs inutiles.

Exemple : *Donner le DL à l'ordre 5 en 0 de* $\sin(x^2)$.

b) Somme de DL

Pour la somme, c'est facile, il suffit de sommer...

On a regroupé les deux $o(x^4)$: rappelons qu'on peut sommer les o !

Exemple : *Donner le DL à l'ordre 4 en 0 de* $\sin(x) + \ln(1+x)$.

Pour somme un DL à l'ordre p et un DL à l'ordre $n < p$, on commence par tronquer le premier à l'ordre n puis on somme. En bref on somme les ordres communs et tout ce qui reste est aspiré par le « trou noir » (cf. remarque en II.4) du $o(x^n)$.

Remarque : En particulier, au voisinage de 0, $\sin(x) + \ln(1+x) \sim 2x$. En effet, l'équivalent est le premier terme non nul du DL ! Par conséquent, quand on voudra « sommer les équivalents » (ce qui est illégal), on contournera la loi et on sommera les DL (ce qui est légal).

c) Produit de DL

Pour le produit, il suffit également de faire le produit, mais réfléchir aux ordres peut parfois éviter des calculs compliqués.

Exemple : *Donner le DL à l'ordre 5 en 0 de* $f(x) = \sin(x) \times (\cos(x) - 1)$.

- ***Méthode naïve :*** *Donnons le DL de* $\sin(x)$ *et* $\cos(x)-1$ *à l'ordre* 5*, et développons :*

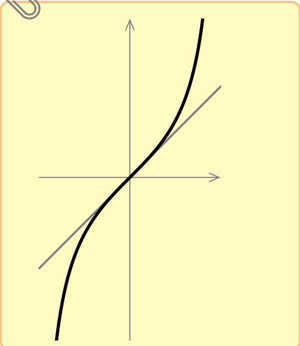
- ***En pratique :*** *Tout d'abord, il est inutile d'écrire un terme quand on se rend compte qu'il a un ordre trop grand donc, dans notre exemple, quand on se rend compte qu'il est négligeable devant x^5. Par conséquent, quand on développe, on n'écrit que les termes de degré inférieur ou égal à 5, les autres étant aspirés par le* o$\left(x^5\right)$ *qu'on met à la fin de l'expression. De plus, il est même inutile de mettre certains termes au début du calcul. Dans notre exemple :*
  - *le premier terme de $\sin(x)$ est x, donc tous les termes de $\cos(x)-1$ seront multipliés au moins par x donc leur degré augmentera au moins de 1. Puisqu'on veut du degré 5 à la fin, il suffit de donner le DL du $\cos$ à l'ordre 4.*
  - *le premier terme de $\cos(x)-1$ est $-x^2/2$, donc tous les termes de $\sin(x)$ seront multipliés au moins par x^2 donc leur degré augmentera au moins de 2. Puisqu'on veut du degré 5 à la fin, il suffit de donner le DL du $\sin$ à l'ordre 3.*

  En conclusion, en pratique, on écrira simplement :

On ne développe pas tous les termes (par exemple, on n'écrit pas le terme $x^3 \times x^4$ ni le terme $x^3 \times$ o$\left(x^4\right)$) : encore une fois, on n'écrit pas les termes dont on sait déjà qu'ils seront négligeables !

7) Allure locale des graphes

a) Tangentes



Des deux dernières propositions du paragraphe III.3.b, on déduit que, sous réserve d'existence, le DL à l'ordre 1 de f est $f(x) = f(0) + xf'(0) + \text{o}\,(x)$.

- La partie principale (c'est-à-dire ce qu'il y a avant le o) du DL à l'ordre 1 est donc l'équation de la tangente en 0 (enfin presque : il manque le $y =$). Ce résultat sera particulièrement utile dans le chapitre 32.
- Il en découle que le polynôme de degré inférieur ou égal à 1 qui est la meilleure approximation de f, c'est-à-dire la meilleure approximation affine de f, est la fonction dont le graphe est la tangente au graphe de f en 0 (quand celle-ci existe,

c'est-à-dire quand f est dérivable en 0). Cela se voit bien sur le graphe ci-contre, où l'on a représenté le graphe de la fonction $\tan$, ainsi que sa tangente en 0 : au voisinage de 0, la tangente est une bonne approximation du graphe de f, et on vient donc de montrer que c'est la meilleure approximation affine.

La question qu'on peut se poser est : peut-on donner les positions relatives des graphes ? Peut-on savoir lequel est au-dessus de l'autre ? En d'autres termes, peut-on comparer $f(x)$ et $f(0) + xf'(0)$? La réponse est oui, quand f admet un DL à un ordre plus grand avec au moins un terme non nul.

Plus précisément, supposons qu'il existe $k \geqslant 2$ et $a_k \neq 0$ tels que

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_k x^k + \text{o}\left(x^k\right)$$

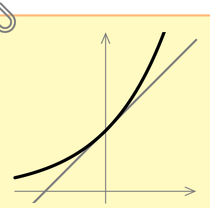
En d'autres termes, k est le plus petit entier supérieur ou égal à 2 tel que f admette un DL à l'ordre k avec $a_k \neq 0$.

En particulier, $f(x) - a_0 - a_1 x = a_k x^k + \text{o}\left(x^k\right) \sim a_k x^k$. Or, deux quantités équivalentes en 0 sont de même signe au voisinage de 0 (cf. II.3 : on a énoncé ce résultat pour les suites, mais il est encore vrai pour les fonctions, avec « au voisinage de a » à la place de « pour n assez grand »), donc $f(x) - a_0 - a_1 x$ est du signe de $a_k x^k$ au voisinage de 0. Plusieurs cas de figure peuvent se produire :

En pratique, on calcule les DL successifs de f en 0 en augmentant l'ordre à chaque fois (sous réserve d'existence), et on s'arrête dès qu'on a un coefficient non nul.

- Si k est impair, alors $x \longmapsto a_k x^k$ change de signe en 0, le graphe de f est successivement au-dessus puis en dessous de sa tangente, ou le contraire, selon le signe de a_k.

  Par exemple, on a vu que $\tan(x) = x + \dfrac{x^3}{3} + \text{o}\left(x^3\right)$. *Par conséquent, la tangente au graphe de la fonction* $\tan$ *en* 0 *est la droite d'équation* $y = x$, *et* $\tan(x) - x \sim x^3/3$ *: le graphe est au-dessus de la tangente au voisinage de* 0^+, *et en dessous au voisinage de* 0^-, *comme on peut le voir sur le graphe ci-dessus.*



- Si k est pair, alors $x \longmapsto a_k x^k$ est de signe constant donc, au voisinage de 0, $x \longmapsto f(x) - a_0 - a_1 x$ est de signe constant : si $a_k > 0$, alors $a_k x^k \geqslant 0$ donc le graphe de f est au-dessus de sa tangente en 0, et si $a_k < 0$, alors le graphe de f est en dessous de sa tangente.

  Par exemple, on a vu que $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \text{o}\left(x^2\right)$. *Par conséquent, la tangente au graphe de la fonction* $\exp$ *en* 0 *est la droite d'équation* $y = 1 + x$, *et on a* $e^x - (1+x) \sim x^2/2$ *: le graphe est au-dessus de la tangente au voisinage de* 0, *comme on peut le voir sur le graphe ci-contre.*

Ainsi, la forme du graphe de f au voisinage de 0 dépend du premier terme non linéaire (c'est-à-dire d'ordre supérieur ou égal à 2) de son développement limité (encore une fois, sous réserve d'existence).

⚠ Tous les résultats de ce paragraphe et du suivant sont des résultats LOCAUX, c'est-à-dire qu'ils ne sont valables que sur un voisinage de 0 (ou de $\pm\infty$ dans le paragraphe suivant). Si on veut prouver un résultat global, par exemple que $e^x \geqslant 1 + x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ne peut pas raisonner comme ci-dessus, mais on peut (par exemple) :

- faire une étude de fonction (cf. chapitre 6).
- appliquer la formule de Taylor avec reste intégral (cf. chapitre 22).
- utiliser de la convexité (cf. chapitre 32).

Le terme de développement asymptotique, et donc sa définition, ne sont pas explicitement au programme. Par contre, la méthode ci-dessous est à connaître : il faut savoir donner l'équation de l'asymptote éventuelle d'une fonction, ainsi que les positions relatives, même sans savoir qu'on effectue en fait un développement asymptotique.

b) Développements asymptotiques et application aux asymptotes

Pour définir un développement asymptotique, on se contentera de la définition intuitive suivante :

Définition (HP). *Un développement asymptotique d'une fonction f ou d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une écriture de f ou de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sous la forme d'une somme de fonctions ou de suites d'ordres de grandeur de plus en plus petits.*

***Exemple :** On a vu dans le paragraphe I.4.b l'égalité suivante :*

$$\ln(n!) = n\ln(n) - n + \frac{\ln(n)}{2} + \ln\left(\sqrt{2\pi}\right) + o(1)$$

On dit qu'on a donné un développement asymptotique de $\ln(n!)$ à la précision $o(1)$.

Différences avec un DL (pour une fonction) ?

- Un développement asymptotique n'est pas forcément au voisinage de 0, on peut faire un développement asymptotique en $\pm\infty$ (voir ci-dessous).
- Les fonctions apparaissant dans le développement asymptotique ne sont pas forcément des polynômes (ci-dessous, on a du $1/x$ mais on peut parfois avoir du $\ln$ par exemple).

***Exemple :** Montrer que la fonction $f : x \longmapsto \sqrt[3]{x^3+2x^2+4x+1}$ admet une asymptote en $+\infty$, et donner les précisions relatives.*

ou $1/x^2$ si le coefficient devant $1/x$ est nul, ou $1/x^3$ si les coefficients devant $1/x$ et $1/x^2$ sont nuls, etc. Mais c'est plus rare.

Méthode : Donner un développement asymptotique à la précision $1/x$. En effet, on veut une équation de droite, donc des termes du type $ax+b$, mais on veut également les positions relatives, donc on veut un terme supplémentaire, de la forme c/x (après ax, puissance 1, et b, puissance 0, vient en général c/x, puissance -1), pour pouvoir donner le signe de la différence, comme dans le paragraphe précédent.