Chapitre 22

Dérivées successives et formules de Taylor

On se donne dans ce chapitre un intervalle I non vide, non réduit à un point.

I Dérivées successives

On se donne dans cette partie et les suivantes deux fonctions f et g de I dans $\mathbb{R}$.

1) Fonctions dérivables n fois, de classe C^n, de classe C^∞

a) Définitions et notations

Pour pouvoir définir $f^{(n+1)}(x_0)$, il faut que la fonction $f^{(n)}$ soit définie au voisinage de x_0.

Définition. *Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur I et si f' est dérivable sur I, alors on dit que f est deux fois dérivable sur I et la dérivée de f' est appelé la dérivée seconde de f. On la note $f^{(2)}$ ou f''.*

On définit les dérivées successives par récurrence : pour un entier $n \geqslant 2$, on dit que f est n fois dérivable sur I si

- *f est $n-1$ dérivable sur I,*
- *$f^{(n-1)}$, la dérivée $(n-1)^{\text{ième}}$ de f, est dérivable sur I.*

La fonction $(f^{(n-1)})'$ est appelée dérivée $n^{\text{ième}}$ de f et notée $f^{(n)}$.

Si, pour tout n, f est dérivable n fois, on dit que f est dérivable une infinité de fois.

Exemple : *On a vu que la fonction $f : x \longmapsto x + x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$, prolongée en 0 en posant $f(0) = 0$, est dérivable mais pas C^1 (cf. chapitre 15). Ainsi, f' n'est pas continue donc n'est pas dérivable en 0 : f n'est pas dérivable deux fois en 0.*

Attention à ne pas confondre $f^{(n)}$ avec $f^n = \underbrace{f \times \cdots \times f}_{n \text{ fois}}$.

Remarques :

- On note généralement f' et f'' au lieu de $f^{(1)}$ et $f^{(2)}$. Mais on n'utilise jamais f''', f'''', etc. surtout pour des raisons pratiques.
- Par convention, on pose $f^{(0)} = f$.
- Si f est dérivable n fois alors f' est dérivable $n-1$ fois et $f^{(n)} = (f')^{(n-1)}$.
- Si f' est dérivable n fois alors f est dérivable $n+1$ fois et $(f')^{(n)} = f^{(n+1)}$.

Les deux dernières propriétés ci-contre peuvent être utiles quand on raisonne par récurrence.

Définition. *Soit $n \geqslant 1$. On dit que f est de classe C^n si f est dérivable n fois et si $f^{(n)}$ est continue sur I.*

Remarque : Par analogie, on dit que f est de classe C^0 si elle est continue.

Proposition. *Soit $n \geqslant 1$.*

- *Si f est de classe C^n alors, pour tout $p \leqslant n$, f est de classe C^p.*
- *Si f est de classe C^n alors f' est de classe C^{n-1}, f'' est de classe C^{n-2} etc.*
- *Si f' est de classe C^n alors f est de classe C^{n+1}.*

On a « f est dérivable n fois sur I » = « $f^{(n)}$ est définie sur I » et « f est C^n sur I » = « $f^{(n)}$ est continue sur I ».

$\rightsquigarrow$ Exercice.

Définition. *Soit $n \geqslant 1$. On note $D^n(I, \mathbb{R})$ (respectivement $C^n(I, \mathbb{R})$) l'ensemble des fonctions dérivables n fois (respectivement de classe C^n) sur I à valeurs réelles.*

Une fonction C^n est évidemment dérivable n fois par définition. La réciproque est fausse : si on appelle f la fonction dérivable non C^1 du chapitre 15, elle est continue donc admet une primitive F, dérivable deux fois, avec $F'' = f'$ non continue, donc F n'est pas C^2, et on peut itérer le procédé pour obtenir une fonction dérivable n fois non C^n.

Proposition. . *Soit $n \geqslant 1$. Si f est dérivable n fois alors f est de classe C^{n-1}.*

Démonstration. Si f est dérivable n fois alors f est dérivable $n-1$ fois et $f^{(n-1)}$ est dérivable donc continue.

Remarque : On a donc les inclusions suivantes :

$$\cdots \subset C^n(I,\mathbb{R}) \subset D^n(I,\mathbb{R}) \subset C^{n-1}(I,\mathbb{R}) \subset D^{n-1}(I,\mathbb{R}) \cdots$$
$$\cdots \subset C^2(I,\mathbb{R}) \subset D^2(I,\mathbb{R}) \subset C^1(I,\mathbb{R}) \subset D^1(I,\mathbb{R}) \subset C^0(I,\mathbb{R})$$

Définition. *On dit que f est de classe C^∞ si f est de classe C^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble des fonctions C^∞ sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ est noté $C^\infty(I,\mathbb{R})$.*

Par conséquent, un moyen simple de prouver qu'une fonction f est C^∞ est de prouver par récurrence que, pour tout n, f est C^n.

Proposition. *La fonction f est de classe C^∞ si et seulement si f est dérivable une infinité de fois.*

Démonstration. Si f est C^∞ alors, pour tout n, f est C^n donc dérivable n fois : f est donc dérivable une infinité de fois. Réciproquement, supposons que f soit dérivable une infinité de fois. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est dérivable $n+1$ fois donc est de classe C^n : f est bien C^∞. □

Remarque : Par définition, $C^\infty(I,\mathbb{R}) = \displaystyle\bigcap_{n\geqslant 1} C^n(I,\mathbb{R})$.

En particulier, il en découle que si f est dérivable et si f' est C^∞ alors f est C^∞ : cf. paragraphe I.3.a.

2) Premiers exemples

Les résultats de ce paragraphe ne doivent pas être appris par cœur, mais ce sont des classiques à savoir retrouver rapidement.

Théorème. *La fonction $\exp$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\exp^{(n)} = \exp$.*

Démonstration. On montre par récurrence (laissée en exercice) que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\exp$ est de classe C^n et $\exp^{(n)} = \exp$. □

Théorème. *La fonction $\cos$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \cos^{(n)} = \begin{cases} \cos & \text{si} \quad n \equiv 0\,[4]\,, \\ -\sin & \text{si} \quad n \equiv 1\,[4]\,, \\ -\cos & \text{si} \quad n \equiv 2\,[4]\,, \\ \sin & \text{si} \quad n \equiv 3\,[4]\,. \end{cases}$$

Démonstration. On montre par récurrence (laissée en exercice) que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\cos$ est de classe C^{4n+3} et

$$\cos^{(4n)} = \cos, \qquad \cos^{(4n+1)} = -\sin, \qquad \cos^{(4n+2)} = -\cos, \qquad \cos^{(4n+3)} = \sin\,.$$

□

Théorème. *La fonction $\sin$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sin^{(n)} = \begin{cases} \sin & \text{si} \quad n \equiv 0\,[4]\,, \\ \cos & \text{si} \quad n \equiv 1\,[4]\,, \\ -\sin & \text{si} \quad n \equiv 2\,[4]\,, \\ -\cos & \text{si} \quad n \equiv 3\,[4]\,. \end{cases}$$

Démonstration. On montre par récurrence (laissée en exercice) que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sin$ est de classe C^{4n+3} et

$$\sin^{(4n)} = \sin, \qquad \sin^{(4n+1)} = \cos, \qquad \sin^{(4n+2)} = -\sin, \qquad \sin^{(4n+3)} = -\cos\,.$$ □

On a déjà vu ce résultat dans le chapitre 17.

Théorème. *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f_k : x \longmapsto x^k$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$,*

$$f_k^{(n)}(x) = \begin{cases} k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)x^{k-n} & \text{si} \quad n \leqslant k, \\ 0 & \text{si} \quad n > k. \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \dfrac{k!}{(k-n)!}x^{k-n} & \text{si} \quad n < k, \\ k! & \text{si} \quad n = k, \\ 0 & \text{si} \quad n > k. \end{cases}$$

Théorème. *La fonction $\ln$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tous $\underline{n \in \mathbb{N}^*}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$,*

$$\ln^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}.$$

Démonstration.

$\square$

3) Opérations sur les dérivées successives

a) Structure d'espace vectoriel

Proposition. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $D^n(I,\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Plus précisément, si $f \in D^n(I,\mathbb{R})$, $g \in D^n(I,\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors*

- *$f+g \in D^n(I,\mathbb{R})$ et $(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$.*
- *$\lambda f \in D^n(I,\mathbb{R})$ et $(\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}$.*

Pour tout $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $C^n(I,\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Démonstration. Par récurrence. $\rightsquigarrow$ Exercice.

Proposition. *Si P un polynôme de degré p à coefficients réels, alors P est de classe C^∞ et, pour tout $n > p$, $P^{(n)}$ est le polynôme nul.*

Démonstration. Soit $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$. Nous avons vu plus haut que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction X^k est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Puisque $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est un espace vectoriel, nous obtenons que P est de classe C^∞. De plus, si $n > p$, alors $P^{(n)} = \sum_{k=0}^{p} a_k \left(X^k\right)^{(n)} = 0$. $\square$

b) La formule de Leibniz

Théorème (formule de Leibniz). *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $f \in D^n(I,\mathbb{R})$ et $g \in D^n(I,\mathbb{R})$, alors $fg \in D^n(I,\mathbb{R})$ et*

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Cette démonstration est très proche de celle du binôme de Newton.

DÉMONSTRATION. Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Montrons ce théorème par récurrence sur n.

- *Initialisation :* Si f et g sont dérivables sur I, alors on a déjà vu que fg est dérivable sur I et que

$$(fg)^{(1)} = (fg)' = f'g + g'f = f^{(1)}g^{(1-1)} + f^{(0)}g^{(1-0)} = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} f^{(k)}g^{(1-k)}.$$

Ainsi la formule est vraie au rang 1.

- *Hérédité :* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que la formule soit vraie au rang n. Soient f et g dans $D^{n+1}(I, \mathbb{R})$. Par hypothèse de récurrence $fg \in D^n(I, \mathbb{R})$ et

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}g^{(n-k)}.$$

Toutes les fonctions de cette somme sont dérivables sur I. Par conséquent $fg \in D^{n+1}(I, \mathbb{R})$ et

$$\begin{aligned}
(fg)^{(n+1)} = ((fg)^{(n)})' &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k)}g^{(n-k)}\right)' \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k+1)}g^{(n-k)} + f^{(k)}g^{(n-k+1)}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)}g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}g^{(n+1-k)}.
\end{aligned}$$

Faisons le changement de variables $j = k + 1$ dans la première somme :

$$\begin{aligned}
&(fg)^{(n+1)} = \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} f^{(j)}g^{(n+1-j)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}g^{(n+1-k)} \\
&= \binom{n}{n} f^{(n+1)}g^{(0)} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right) f^{(k)}g^{(n+1-k)} + \binom{n}{0} f^{(0)}g^{(n+1)} \\
&= \binom{n+1}{n+1} f^{(n+1)}g^{(0)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} f^{(k)}g^{(n+1-k)} + \binom{n+1}{0} f^{(0)}g^{(n+1)}.
\end{aligned}$$

on utilise aussi le fait que $\binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1} = 1$ et que $\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0} = 1$

Ainsi la formule est vraie au rang $n + 1$.

D'où le théorème par récurrence. □

Puisque $C^0(I, \mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et puisque le produit de deux fonctions continues est une fonction continue, nous en déduisons :

Proposition. *Soit $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Si f et g sont des fonctions de classe C^n sur I, alors fg est de classe C^n sur I.*

Exemple : *Posons $\varphi : x \longmapsto x^3e^x$.*

Proposition. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient f et g deux fonctions n fois dérivables sur I (resp. de classe C^n, de classe C^∞). Si g ne s'annule pas sur I, alors les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont n fois dérivables (resp. de classe C^n, de classe C^∞) sur I.*

Démonstration. Par récurrence. $\rightsquigarrow$ Exercice.

c) Composition

Proposition. *Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ avec J un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $f(I) \subset J$.*

- *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $f \in D^n(I, \mathbb{R})$ et $g \in D^n(J, \mathbb{R})$, alors $g \circ f \in D^n(I, \mathbb{R})$.*
- *Soit $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Si $f \in C^n(I, \mathbb{R})$ et $g \in C^n(J, \mathbb{R})$, alors $g \circ f \in C^n(I, \mathbb{R})$.*

Démonstration. Montrons ce théorème pour $D^n(I, \mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}^*$. Les autres cas en sont des conséquences.

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $(a, b) \in I^2$. Montrons la proposition par récurrence sur n.

- *Initialisation :* Si f dérivable sur I et g est dérivable sur J, alors on a déjà montré dans le chapitre *Dérivation* que $g \circ f$ est dérivable sur I avec $(g \circ f)' = f' \times g' \circ f$. Ainsi la proposition est vraie au rang 1.
- *Hérédité :* Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que la proposition soit vraie au rang n. Soient $f \in D^{n+1}(I, \mathbb{R})$ et $g \in D^{n+1}(J, \mathbb{R})$. La fonction $g \circ f$ est dérivable sur I et nous avons $(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f)$. Puisque $f \in D^n(I, \mathbb{R})$ et $g' \in D^n(J, \mathbb{R})$, l'hypothèse de récurrence entraîne que $g' \circ f \in D^n(I, \mathbb{R})$. Enfin $f' \in D^n(I, \mathbb{R})$ donc $(g \circ f)' \in D^n(I, \mathbb{R})$. Ainsi $g \circ f \in D^{n+1}(I, \mathbb{R})$ et la proposition est donc vraie au rang $n + 1$.

D'où la proposition par récurrence. □

4) Le cas des fonctions usuelles

Théorème. *Les fonctions polynomiales, rationnelles, exponentielles, logarithmes, sinus, cosinus, tangente et Arctangente sont de classe C^∞ sur leur domaine de définition.*

Démonstration. Le cas des fonctions polynomiales, exponentielle, cosinus, sinus et logarithme népérien ont déjà été traités dans le paragraphe 2.

- Les fractions rationnelles ainsi que $\tan = \frac{\sin}{\cos}$ sont de classe C^∞ sur leur domaine de définition en tant que quotient de deux fonctions de classe C^∞ dont le dénominateur ne s'annule pas.
- $\mathrm{Arctan}' : x \longmapsto \frac{1}{1 + x^2}$ est rationnelle et définie sur $\mathbb{R}$. Elle est donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. On en déduit que Arctan aussi. □

5) Extrema locaux pour les fonctions C^2

Définition. *Supposons f dérivable sur I. Un point critique de f est un point en lequel f' s'annule.*

On a vu au chapitre 15 (voir le rappel dans la marge) une condition nécessaire pour qu'un point intérieur (un point de I n'étant pas une extrémité de I) soit un point critique. Donnons à présent une condition suffisante quand la fonction est de classe C^2.

On a vu que si f est dérivable en a, si a est un point intérieur et si f admet en a un extremum local, alors $f'(a) = 0$, c'est-à-dire que a est un point critique. De plus, la réciproque est fausse, comme on le voit avec la fonction cube en 0 : cf. chapitre 15.

Proposition (condition suffisante d'extremum local en un point intérieur pour les fonctions C^2). *Supposons f de classe C^2 sur I. Soit a un point critique intérieur de I.*

- *Si $f''(a) > 0$, alors f admet un minimum local en a.*
- *Si $f''(a) < 0$, alors f admet un maximum local en a.*
- *Si $f''(a) \neq 0$, alors f admet un extremum local en a.*

Démonstration. Supposons $f''(a) > 0$. Comme f est de classe C^2, f'' est continue en a donc il existe $\eta > 0$ tel que f'' soit strictement positive sur $[a-\eta\,;a+\eta]$ (il existe un tel voisinage inclus dans I car a est un point intérieur), si bien que f' est strictement croissante sur cet ensemble. Or, $f'(a) = 0$ donc f' est strictement négative sur $[a-\eta\,;a[$ donc f est strictement décroissante sur $[a-\eta\,;a]$. De même, f est strictement croissante sur $[a\,;a+\eta]$. Il en découle que f admet en a un minimum local. On montre de même que, si $f''(a) < 0$, alors f admet en a un maximum local. Enfin, si $f''(a) \neq 0$, on se trouve dans l'un des deux cas. □

Exemple : *Étudions les extrema locaux de la fonction $f : x \in \mathbb{R}^* \longmapsto x^2 + 4x - 6\ln(|x|)$.*

Si $f''(x_0) = 0$, alors on ne peut pas conclure.

- *Considérons la fonction $f : x \longmapsto \sin(x) - x$. Elle est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et $f' = \cos -1$, $f'' = -\sin$. Par conséquent 0 est un point critique de f vérifiant $f''(0) = 0$. Mais il ne s'agit pas d'un extremum local : f' est négative sur $\mathbb{R}$ et $f(0) = 0$ donc f est positive sur $\mathbb{R}_-$ et négative sur $\mathbb{R}_+$.*
- *Considérons la fonction $g : x \longmapsto \sin^2(x) - x^2$. Elle est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 2\cos(x)\sin(x) - 2x = \sin(2x) - 2x = f(2x)$. Nous en déduisons que :*
  - *g admet 0 pour unique point critique.*
    Ensuite $g''(0) = 2f'(0) = 2(\cos(0) - 1) = 0$.
  - *g' est positive (resp. négative) sur $\mathbb{R}_-$ (resp. $\mathbb{R}_+$) et donc g admet un unique maximum en 0.*

II Formules de Taylor

Dans toute cette section, n désigne un entier naturel. On adaptera aussi la convention que, pour tout $(a, b) \in I^2$ tel que $a > b$, $[a, b]$ désigne l'intervalle $[b, a]$.

⚠ Mais attention aux bornes des intégrales lorsqu'on utilise la positivité de l'intégrale !

1) Formule de Taylor avec reste intégral

En fait il est suffisant que f soit de classe C^{n+1} mais le programme exige l'hypothèse C^∞ et, dans la pratique, c'est tout le temps le cas.

Théorème (formule de Taylor avec reste intégral). *Soit f une fonction de classe C^∞ sur I. Soit $n \in \mathbb{N}$.*

$$\forall (a, b) \in I^2, \qquad f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt.$$

Cette égalité est appelée formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n.

Remarques :

- L'intégrale a bien un sens puisque $t \longmapsto \dfrac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)$ est continue sur l'intervalle $[a, b]$.
- Quelques cas particuliers :

Démonstration.

$\square$

Remarque : Si P est un polynôme de degré n, alors P est de classe C^{n+1} sur $\mathbb{R}$ et $P^{(n+1)}$ est le polynôme nul. On retrouve alors la formule de Taylor pour les polynômes.

Corollaire. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit f une fonction de classe C^n sur $\mathbb{R}$ telle que $f^{(n)}$ est la fonction nulle. Alors f est une application polynomiale de degré au plus $n-1$.*

DÉMONSTRATION. La formule de Taylor avec reste intégrale entraîne que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

Donc $f \in \mathbb{R}_n[X]$. $\square$

2) Inégalité de Taylor-Lagrange

Cette formule de Taylor, comme la précédente, est valable avec $a \leqslant b$ et également avec $a \geqslant b$. En général, on l'applique avec $a = 0$ et $b = x$.

En fait il est suffisant que f soit de classe C^{n+1} mais le programme exige l'hypothèse C^∞ et, dans la pratique, c'est tout le temps le cas.

Théorème (inégalité de Taylor-Lagrange). *Soit f une fonction de classe C^∞ sur I. Soit $(a,b) \in I^2$. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $f^{(n+1)}$ est continue donc bornée sur $[a,b]$. De plus*

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right| \leqslant \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \max_{[a,b]} \left| f^{(n+1)} \right|.$$

Remarques :

- Comme f est C^∞, pour tout $n \in \mathbb{N}$, elle est C^{n+1} donc, pour tout $(a,b) \in I^2$, $f^{(n+1)}$ est continue sur le segment $[a\,;b]$, d'où l'existence du maximum ci-contre.
- Pour $n = 0$, cette inégalité devient : $|f(b) - f(a)| \leqslant \max\limits_{[a\,;b]} |f'| \times |b-a|$. C'est l'inégalité des accroissements finis ! L'inégalité de Taylor-Lagrange est une généralisation de cette inégalité à un ordre plus grand, quand la fonction est plus régulière.

DÉMONSTRATION.

Il n'est pas toujours possible de calculer le maximum ci-dessus. Cependant, comme dans l'inégalité des accroissements finis, l'inégalité de Taylor-Lagrange est toujours valable avec un majorant. En effet, si M est un majorant de $|f^{(n+1)}|$ sur $[a\,;b]$ ou même sur I tout entier, $\max\limits_{[a\,;b]} |f^{(n+1)}| \leqslant M$ et donc on peut majorer la valeur absolue par $M \times \dfrac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$.

□

3) Applications

a) Quelle formule dans quel cas ?

Le but des formules de Taylor est d'approcher f par le polynôme

$$P : x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Plus précisément, elles permettent en fait de donner des informations sur l'erreur commise en approchant f par P : l'erreur est-elle positive ? L'erreur tend-elle vers 0 ?

Question : Quand utiliser la formule de Taylor reste intégral, et quand utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange ?

- L'avantage de la formule de Taylor avec reste intégral est qu'on a une égalité et qu'il n'y a pas de valeur absolue. Ainsi, par exemple, si on connaît le signe du reste intégral (par exemple, en utilisant la positivité de l'intégrale), on sait comparer $f(x)$ et la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$: on sait qui est le plus grand entre f et P. L'inconvénient du reste intégral est qu'il est souvent impossible à calculer, et qu'il n'est pas toujours facile de prouver, le cas échéant, qu'une intégrale tend vers 0.
- L'avantage de l'inégalité de Taylor-Lagrange est que le membre de droite est beaucoup plus simple à calculer que le reste intégral, en particulier si l'on veut montrer qu'il tend vers 0. De plus, même si on ne sait pas le calculer exactement, il est plus facile de le majorer (voir remarque ci-dessus). L'inconvénient est qu'il ne donne qu'une majoration (mais cela peut suffire si, par exemple, on veut montrer que la différence entre $f(x)$ et la somme tend vers 0) et qu'il y a une valeur absolue : on ne peut donc pas comparer $f(x)$ et la somme car, avec une valeur absolue, on perd toute notion de signe.

b) Preuve d'une inégalité

Montrons que

$$\forall x \in \left]-1\,;+\infty\right[, \qquad \frac{1}{\sqrt[4]{1+x}} \geqslant 1 - \frac{x}{4} + \frac{5x^2}{32} - \frac{15x^3}{128}.$$

On pourrait bien sûr (méthode ultra classique) étudier la fonction f définie par la différence du terme de gauche, avec le terme de droite. Mais nous allons devoir dériver 3 fois pour obtenir le signe de $f^{(3)}$ donc les variations de f'' donc le signe de f'' donc les variations de f' donc le signe de f' donc les variations de f et donc le signe de f. Cela s'annonce fastidieux (mais néanmoins facile).

On a utilisé la formule de Taylor avec reste intégral ! On ne devait surtout pas utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange puisqu'ici on a besoin d'étudier de comparer des fonctions, ce qui revient à déterminer le signe d'une fonction. Or, comme on l'a dit, les valeurs absolues dans l'inégalité de Taylor-Lagrange font perdre toute notion de signe !

c) « Série » exponentielle

Théorème. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^x$.

Démonstration.

$\square$

d) Dérivation sous le signe intégrale

Les résultats de ce paragraphe ne sont pas au programme. Mais c'est une technique très classique (et systématiquement guidée en concours) dont il est conseillé de connaître les grandes lignes.

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$. On se donne une fonction f définie sur $I \times [a, b]$ et à valeurs réelles. Pour tout $t \in [a, b]$, on introduit aussi la fonction $f_t : x \in I \longmapsto f(x, t)$.

On suppose que, pour tout $x \in I$, la fonction $t \longmapsto f(x, t)$ est continue sur $[a, b]$ et on introduit alors

$$F(x) = \int_a^b f(x, t)\, dt = \int_a^b f_t(x)\, dt.$$

Exemple : *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \int_2^3 \frac{t^x}{\ln(t)}\, dt$

Nous aimerions étudier la dérivabilité de F sur I. Pour cela nous sommes tentée d'échanger l'intégrale et la dérivation, c'est-à-dire d'écrire

$$\forall x \in I, \qquad F'(x) = \int_a^b f_t'(x)\, dt.$$

C'est faux en général ! !

Voici comment s'en sortir à l'aide de la formule de Taylor Lagrange :

- **Étape 1.** On fixe $t \in [a, b]$ et $x \in I$. On se donne $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $x + h \in I$. On montre que f_t est de classe C^2 sur I, alors on applique alors l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 (avec $b = x + h$ et $a = x$) :

$$\left| f_t(b) - f_t(a) - (b - a)\, f_t'(x) \right| \leqslant \frac{|b - a|^2}{2} \max_{[a,b]} |f_t''|$$

donc

$$\left| f_t(x + h) - f_t(x) - h\, f_t'(x) \right| \leqslant \frac{h^2}{2} \max_{[x,x+h]} |f_t''|.$$

Puis on divise par $|h| \neq 0$:

Et non pas par h... erreur classique dans ce raisonnement.

$$\left| \frac{f_t(x + h) - f_t(x)}{h} - f_t'(x) \right| \leqslant \frac{|h|}{2} \max_{[x,x+h]} |f_t''|$$

On voit apparaître un taux d'accroissement.

- **Étape 2.** On montre qu'il existe une fonction g continue sur $[a, b]$ telle que, pour tout $y \in I$, $|f_t''(y)| \leqslant g(t)$.

L'idée est de faire disparaître la dépendance du $\max$ en h. Si ce n'est pas possible, on se place sur un segment centré en x et on cherche une telle inégalité sur ce ce segment seulement (puisque h tend vers 0, ce n'est pas un problème en général).

$$\left| \frac{f_t(x + h) - f_t(x)}{h} - f_t'(x) \right| \leqslant \frac{|h|}{2}\, g(t).$$

- **Étape 3.** On justifie que les fonctions de chaque côté sont continues sur $[a, b]$ et on intègre l'inégalité ci-dessus (par propriété de croissance des intégrales) :

$$\int_a^b \left| \frac{f_t(x + h) - f_t(x)}{h} - f_t'(x) \right| dt \leqslant \frac{|h|}{2} \int_a^b g(t)\, dt.$$

- **Étape 4.** On utilise l'inégalité triangulaire :

$$\left|\int_a^b \left(\frac{f_t(x+h)-f_t(x)}{h} - f_t'(x)\right) dt\right| \leqslant \frac{|h|}{2}\int_a^b g(t)\,dt$$

et donc, par linéarité,

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - \int_a^b f_t'(x)\,dt\right| \leqslant \frac{|h|}{2}\int_a^b g(t)\,dt.$$

- **Étape 5.** On utilise le théorème d'encadrement pour conclure que

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} \int_a^b f_t'(x)\,dt.$$

Autrement dit F est dérivable en x et $F'(x) = \displaystyle\int_a^b f_t'(x)\,dt$.

Exemple : *Reprenons l'exemple ci-dessus : pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$F(x) = \int_2^3 \frac{t^x}{\ln(t)}\,dt = \int_2^3 f(x,t)\,dt,$$

avec $f : (x,t) \longmapsto \dfrac{e^{x\ln(t)}}{\ln(t)}$. On vérifie que f vérifie bien toutes les hypothèses ci-dessus.

$\rightsquigarrow$ EXERCICE.

A la deuxième égalité, on dérive selon x (à t fixé). A la quatrième, on intègre selon t (à x fixé).

Ainsi F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F'(x) = \int_2^3 f_t'(x)\,dt = \int_2^3 \frac{\ln(t)e^{x\ln(t)}}{\ln(t)}\,dt = \int_2^3 t^x\,dt.$$

Si $x=-1$, alors $F'(x) = \displaystyle\int_2^3 \ln(t)\,dt = \ln(3)-\ln(2)$

Si $x \neq -1$, alors $F'(x) = \left[\dfrac{t^{x+1}}{x+1}\right]_2^3 = \dfrac{3^{x+1}-2^{x+1}}{x+1}$.