Chapitre 21

Applications linéaires

Nous allons à présent nous intéresser aux applications linéaires : les applications d'un espace vectoriel dans un autre qui préservent la somme et la multiplication externe.

Dans ce chapitre E, F et G désignent des espaces vectoriels.

I Notions d'application linéaire

Si f est une application définie sur $\mathbb{R}^n$ (avec $n \geqslant 2$) et si $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ alors on note souvent $f(x_1, \dots, x_n)$ au lieu de $f((x_1, \dots, x_n))$.

Définition (application linéaire). *Une application f de E dans F est dite linéaire si, pour tous vecteurs x et y de E et pour tout réel λ,*

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad \text{et} \qquad f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

Exemple : *Montrons que L'application $f : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto (5x-2y, x+7z)$ est linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$.*

Il faut arriver à dépasser la notation (x,y,z) dans la définition de f et à calculer l'image de n'importe quel vecteur. Pour cela, il suffit de comprendre qu'en fait, si a est un vecteur de $\mathbb{R}^3$, on a $f(a) = (5 \times$ [première coordonnée de a] $- 2 \times$ [deuxième coordonnée de a] , [première coordonnée de a] $+ 7 \times$ [troisième coordonnée de a]), d'où les images ci-contre.

Définition.

- *On note $\mathscr{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.*
- *Une forme linéaire de E est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$.*
- *Un endomorphisme de E est une application linéaire de E dans E. On note $\mathscr{L}(E)$ au lieu de $\mathscr{L}(E,E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.*
- *Un isomorphisme de E dans F est une application linéaire bijective de E dans F.*
- *Un automorphisme de E est un endomorphisme de E bijectif. On note $GL(E)$ l'ensemble des automorphismes de E.*

Un automorphisme de E est donc un isomorphisme de E dans E, c'est-à-dire à la fois un isomorphisme et un endomorphisme.

Proposition. *Si f est linéaire de E dans F, alors $f(0_E) = 0_F$.*

Démonstration.

□

Proposition. *Les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *f est linéaire de E dans F.*
2. *Pour tous $(x,y) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$.*
3. *Pour tous $(x,y) \in E^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$.*
4. *Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$ et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$*

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

La proposition précédente est une condition **nécessaire** importante. La réciproque est fausse, c'est-à-dire qu'on peut avoir $f(0_E) = 0_F$ sans que f soit linéaire. Cette condition sera souvent utilisée dans le sens direct, mais aussi par contraposée, c'est-à-dire que si on a une application $f : E \longrightarrow F$ telle que $f(0_E) \neq 0_F$, alors on peut affirmer directement que f n'est pas linéaire.

Démonstration.

- Supposons que f est linéaire de E dans F. Soient $(x,y) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Comme f est linéaire, on a $f(\lambda x + y) = f(\lambda x) + f(y)$ puis $f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$. Ainsi $1 \Rightarrow 2$ est vraie.
- Supposons la propriété 2 vraie. Donnons-nous $(x,y) \in F^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On a $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + f(\mu y)$, on a toujours $f(0_E) = 0_F$ car, par hypothèse, $f(0_E) = f(1 \cdot 0_E + 0_E) = 1 \cdot f(0_E) + f(0_E)$, d'où :

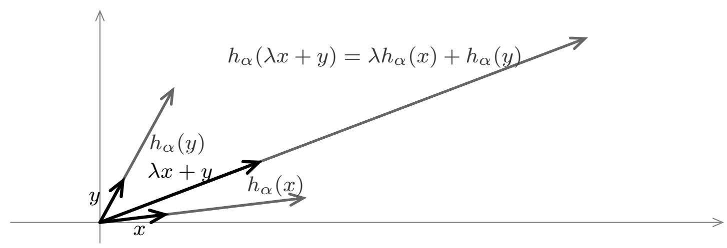
$$f(\mu y) = f(\mu y + 0_E) = \mu f(y) + f(0_E) = \mu f(y) + 0_F = \mu f(y)$$

(d'après la propriété 2) donc $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$. Ainsi $2 \Rightarrow 3$ est vraie.
- On montre $3 \Rightarrow 4$ par récurrence sur n.
- On montre $4 \Rightarrow 1$ en prenant d'abord $n = 2$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ (pour obtenir $f(x+y) = f(x) + f(y)$) puis $n = 1$, $x_1 = x$ et $\lambda_1 = \lambda$ (pour obtenir $f(\lambda x) = \lambda f(x)$). $\square$

Exemples :

On la note $0_{\mathscr{L}(E,F)}$ puisqu'on verra dans la prochaine partie que c'est l'élément neutre de l'espace vectoriel $\mathscr{L}(E,F)$. Mais on la note plus simplement 0 lorsqu'il n'y a pas ambiguïté.

- *L'application $\left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & 0_F \end{array} \right.$ est linéaire. On l'appelle application linéaire nulle de E dans F.*
- *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. L'application $h_\alpha : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \alpha x \end{array} \right.$ est un endomorphisme sur E (appelé homothétie sur E de rapport α). En effet :*



Si $\alpha \neq 0$ alors il est immédiat que $h_{1/\alpha} \circ h_\alpha = h_\alpha \circ h_{1/\alpha} = \mathrm{Id}_E$. Ainsi h_α est bijective donc c'est un automorphisme de bijection réciproque de $h_{1/\alpha}$.

En prenant $\alpha = 1$, on en déduit que :

Proposition. *L'identité de E, c'est-à-dire l'application $\mathrm{Id}_E : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array} \right.$, est un automorphisme de E.*

L'homothétie h_α est donc plutôt notée $\alpha \mathrm{Id}_E$ dans la pratique.

Exemples :

$f \neq f^{-1}$ (il suffit de regarder les espaces de départ et d'arrivée) à moins que $n = p$. Dans ce cas f est un automorphisme.

Nous avons parlé de linéarité dans les chapitres concernés quand nous avons donné ces propriétés : par linéarité de la dérivation, de l'intégrale, de la transposition. Le lecteur peut enfin se rendre compte que derrière ces propriétés se trouve une notion générale !

II Opérations sur les applications linéaires

1) Restriction d'une application linéaire à un sous-espace vectoriel

Considérer la restriction de f à E' revient simplement à « oublier » que f est définie sur E tout entier. Dans le second point, le fait que $f(E') \subset F'$, garantit que les images des vecteurs de E' sont dans F' et donc considérer la restriction de f à E' et F' revient à « supprimer » les vecteurs de F qui ne sont pas dans F'.

Proposition. *Soit E' un sous-espace vectoriel de E et F' un sous-espace vectoriel de F. Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.*

- *On appelle restriction de f au sous-espace vectoriel E' l'application*

$$f|_{E'} : \left\{ \begin{array}{ccc} E' & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$$

Il s'agit d'une application linéaire de E' dans F.

- *Supposons que $f(E') \subset F'$. On appelle restriction de f aux sous-espaces vectoriels E' et F' l'application*

$$f|_{E'}^{F'} : \left\{ \begin{array}{ccc} E' & \longrightarrow & F' \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$$

Il s'agit d'une application linéaire de E' dans F'.

Cela ne signifie pas que $f|_{E'}^{F'}$ est surjective puisqu'on ne sait pas si $f(E') = F'$.

Démonstration. Montrons le deuxième point (le premier revient à prendre $F' = F$). L'application $f|_{E'}^{F'}$ est bien définie car, pour tout $x \in E'$, $f|_{E'}^{F'}(x) = f(x) \in F'$ par hypothèse. Si $(x, y, \lambda) \in E'^2 \times \mathbb{R}$, alors $\lambda x + y \in E'$ (puisque E' est un sous-espace vectoriel de E).

Comme f est linéaire, on a

$$f\big|_{E'}^{F'}(\lambda x + y) = f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y) = \lambda f\big|_{E'}^{F'}(x) + f\big|_{E'}^{F'}(y).$$

Ainsi $f\big|_{E'}^{F'}$ est linéaire de E' dans F'. □

Exemple :

2) Somme et multiplication par un scalaire d'applications linéaires

La notion de produit d'applications linéaires n'a pas de sens en général puisqu'on ne ne peut pas multiplier des vecteurs a priori (mais les produits scalaires sont au programme de deuxième année).

Dans le chapitre 18, nous avons défini une addition et une multiplication externe sur $\mathcal{F}(E,F)$, l'ensemble des applications de E dans F, qui le munissent d'une structure d'espace vectoriel (car F est un espace vectoriel).

Proposition. *L'ensemble $\mathscr{L}(E,F)$ est un espace vectoriel : si $(f,g) \in \mathscr{L}(E,F)^2$ et $\lambda \in K$, alors $f+g \in \mathscr{L}(E,F)$ et $\lambda f \in \mathscr{L}(E,F)$.*

Démonstration.

□

Cette proposition est vraie en particulier lorsque $F = E$. Ainsi

Corollaire. *$\mathscr{L}(E)$ est un espace vectoriel.*

L'ensemble $GL(E)$ des automorphismes de E n'est pas un espace vectoriel (car l'application nulle sur E n'est pas bijective).

3) Composition d'applications linéaires

a) Premières propriétés

En d'autres termes, quand elle est bien définie, une composée d'applications linéaires est une application linéaire.

Proposition (composition d'applications linéaires). *Soit F' un sous-espace vectoriel de F. Si $f \in \mathscr{L}(E, F')$ et $g \in \mathscr{L}(F, G)$, alors $g \circ f$ est une application linéaire de E dans G.*

DÉMONSTRATION.

$\square$

Proposition. *Soit F' un sous-espace vectoriel de F. Soient $(f, \tilde{f}) \in \mathscr{L}(E, F')^2$, $(g, \tilde{g}) \in \mathscr{L}(F, G)^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Nous avons*

1. $(g + \tilde{g}) \circ f = g \circ f + \tilde{g} \circ f$,
2. $g \circ (f + \tilde{f}) = g \circ f + g \circ \tilde{f}$,
3. $\lambda(g \circ f) = (\lambda g) \circ f = g \circ (\lambda f) = g \circ (f \circ (\lambda \operatorname{Id}_E)) = (g \circ f) \circ (\lambda \operatorname{Id}_E)$, *c'est-à-dire :*

$$\forall x \in E, \qquad \lambda g(f(x)) = (\lambda g)(f(x)) = g(\lambda f(x)) = g(f(\lambda x)) = (g \circ f)(\lambda x).$$

Le premier point de cette proposition est vrai même si f ou g ne sont pas linéaires (il découle de la définition de l'addition et de la multiplication externe sur $\mathcal{F}(F, G)$). Le deuxième point découle de la linéarité de g. Dans le troisième point, la première et la quatrième égalités sont toujours vraies, la deuxième découle de la linéarité de g et la troisième de la linéarité de f.

$\rightsquigarrow$ EXERCICE.

b) Puissances d'un endomorphisme

Définition (puissances d'un endomorphisme). *Si $f \in \mathscr{L}(E)$ alors on pose $f^0 = \operatorname{Id}_E$, $f^1 = f$ et, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $f^p = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{p \text{ fois}}$.*

Remarque : Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $f^{p+1} = f^p \circ f = f \circ f^p$.

⚠ Cela n'a de sens que si f est un endomorphisme. En effet, si f va de E dans F avec $E \neq F$, $f \circ f$ n'est pas forcément définie.

Définition. *On dit que deux endomorphismes f et g de E commutent si $f \circ g = g \circ f$.*

⚠ En général deux endomorphismes ne commutent pas.

Par exemple $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto (x, y - x)$ et $g : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto (-x, y)$ sont des endomorphismes de $\mathbb{R}^2$. $\rightsquigarrow$ EXERCICE.

⚠ Ne pas confondre :
- $f^p(x)$, c'est-à-dire

$$f \circ \cdots \circ f(x) = f(f(\cdots f(x))).$$

- $(f(x))^p$ qui n'a aucun sens en général puisque $f(x)$ est un vecteur et que l'on ne définit pas la puissance d'un vecteur.

Remarque : Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \operatorname{Id}_E$ commute avec tout endomorphisme de E.

La notation f^n, même si elle n'a rien à voir avec un quelconque produit (voir la remarque dans la marge à la page précédente) vérifie les mêmes propriétés que la notation puissance sur $\mathbb{R}$. De façon générale, la composition sur $\mathscr{L}(E,F)$ vérifie les mêmes propriétés que le produit sur $\mathbb{R}$, à une (énorme) exception près : elle n'est pas commutative ! Cependant, elle est associative, distributive par rapport à la somme etc. Maîtriser cette analogie (sans toutefois confondre avec le produit) permet de gagner du temps dans les calculs.

Proposition. *Si $f \in \mathscr{L}(E)$ et $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, alors*

$$f^n \circ f^p = f^{n+p} = f^p \circ f^n \qquad \text{et} \qquad (f^n)^p = f^{np} = (f^p)^n.$$

*Si $g \in \mathscr{L}(E)$ **commute** avec f, alors $(g \circ f)^n = g^n \circ f^n$.*

$\rightsquigarrow$ EXERCICE.

Proposition (binôme de Newton). *Soient f et g deux endomorphismes de E qui **commutent**. Alors, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,*

$$(f+g)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} f^k \circ g^{p-k} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} f^{p-k} \circ g^k.$$

DÉMONSTRATION. Nous la laissons en exercice : c'est exactement la même démonstration que pour les matrices en remplaçant A par f, B par g et le produit matriciel par la composition. $\square$

Exemple :

Remarquons la grande similarité entre les propriétés du produit de matrices (respectivement de matrices carrées) et celles de la composition d'applications linéaires (respectivement d'endomorphismes). Et il y en a beaucoup d'autres. Cela s'expliquera très bien dans le chapitre 27.

c) Notion de projecteur

Définition (projecteur). *On dit qu'un endomorphisme p de E est un projecteur de E si $p \circ p = p$.*

Exemple : *Soit $f : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto (2x+3y-z, -x-2y+z, -x-3y+2z)$. Montrons que f est un projecteur de $\mathbb{R}^3$. On a*

- *f est un endomorphisme.* $\rightsquigarrow$ Exercice.
- *$f \circ f = f$. En effet :*

Lorsqu'on demande de montrer qu'une application f est un projecteur, il y a deux choses à montrer :
• f est un endomorphisme, c'est-à-dire va de E dans E et surtout est linéaire (cette partie est trop souvent oubliée par les candidats),
• $f^2 = f \circ f = f$ (ou encore $f^2 = f$).

La notion de projecteur est très importante et nous y reviendrons longuement dans le paragraphe III.5 et dans le chapitre 25.

d) Polynômes d'endomorphisme

Définition. *Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$. On pose*

$$P(f) = \sum_{k=0}^{d} a_k f^k = a_0 \operatorname{Id}_E + a_1 f + a_2 f^2 + \cdots + a_d f^d.$$

On dit que l'endomorphisme $P(f)$ est un polynôme en f.

Si $f \in \mathscr{L}(E)$, alors $1(f) = \operatorname{Id}_E$, $X(f) = f$, ..., $X^k(f) = f^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Attention à ne pas oublier Id_E pour le terme constant, écrire $a_0 + a_1 f$ n'a aucun sens, on ne peut pas sommer applications linéaires et réels.

Exemples :

Proposition. . *Soient $P \in \mathbb{R}[X]$, $Q \in \mathbb{R}[X]$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{L}(E)$, alors*

$$(\alpha P + Q)(f) = \alpha P(f) + Q(f) \quad \text{et} \quad (PQ)(f) = P(f) \circ Q(f) = Q(f) \circ P(f).$$

$\rightsquigarrow$ Exercice.

En d'autres termes, deux polynômes en f commutent. Mieux encore : si f et g sont deux endomorphismes de E qui commutent, alors tout polynôme en f commute avec tout polynôme en g

Définition. *Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ et $f \in \mathscr{L}(E)$. On dit que P est un polynôme annulateur de f si $P(f)$ est l'endomorphisme nul sur E.*

Exemples :

On peut appliquer aussi cette méthode pour les matrices à l'aide de polynômes annulateurs.

Connaître un polynôme annulateur d'un endomorphisme permet de calculer facilement les puissances successives.

4) Réciproque d'un isomorphisme

Le théorème de la bijection ne s'applique que s'il s'agit de fonction de la variables réelles et à valeurs réelles... donc pas du tout dans ce chapitre (à moins d'un endomorphismes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, ce qui n'est pas très passionnant...

Rappel : Pour montrer qu'une application $f : E \longrightarrow F$ est une bijection, on a vu plusieurs méthodes dans le chapitre 9 :

- Montrer que f est injective et surjective.
- Trouver une application $g : F \longrightarrow E$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ **et** $f \circ g = \mathrm{Id}_F$ (cette application g est alors la réciproque de f).
- Trouver $g : F \longrightarrow E$ telle que, pour tous $x \in E$ et $y \in F$, $y = f(x)$ si et seulement si $x = g(y)$ (cette application g est alors la réciproque de f).

On verra plusieurs autres méthodes dans le cas des isomorphismes.

Proposition (isomorphisme réciproque). *Si f est un isomorphisme de E dans F, alors sa réciproque f^{-1} est un isomorphisme de F dans E.*

Puisque f^{-1} est bijective (c'est la bijection réciproque), il suffit de prouver que f^{-1} est linéaire.

DÉMONSTRATION.

□

Définition. *On dit que deux espaces vectoriels E et F sont isomorphes si il existe un isomorphisme de E sur F.*

Exemple : *Reprenons l'exemple du paragraphe précédent avec l'endomorphisme $f : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto (-x-2z, x+y+z, -x)$. On a vu que f vérifie $f^2 + f - 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} = 0$.*

En factorisant, on écrit $f \circ (f + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ et non pas $f \circ (f+1)$. Ajouter un réel à une application n'a aucun sens.

Si deux applications $f : E \to F$ et $g : F \to E$ sont telles que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$, alors cela ne suffit pas pour conclure que f et g sont bijectives et réciproque l'une de l'autre. Il faut aussi vérifier que $f \circ g = \mathrm{Id}_F$. À moins que ce ne soient des applications linéaires en dimension finie (cf. chapitre 26)

Cet exemple illustre une technique classique : si on connait un polynôme annulateur $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ d'un endomorphisme f de E dont le coefficient constant a_0 est non nul, alors $a_0\,\mathrm{Id}_E = -\displaystyle\sum_{k=1}^{d} a_k f^k$ donc $\mathrm{Id}_E = -\displaystyle\sum_{k=1}^{d} \frac{a_k}{a_0} f^k$ donc

$$\mathrm{Id}_E = f \circ \left(-\sum_{k=1}^{d} \frac{a_k}{a_0} f^{k-1} \right) = \left(-\sum_{k=1}^{d} \frac{a_k}{a_0} f^{k-1} \right) \circ f.$$

Ainsi f est bijective et $f^{-1} = -\displaystyle\sum_{k=1}^{d} \frac{a_k}{a_0} f^{k-1}$. Mais que faire lorsqu'on ne connait pas de polynôme annulateur ? Et bien comme dans le chapitre 9, en étudiant la surjectivité et l'injectivité. C'est l'objet de la partie suivante.

III Image et noyau d'une application linéaire

1) Image d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire

En d'autres termes, l'image d'un espace vectoriel par une application linéaire est encore un espace vectoriel.

Proposition. *Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Si E' est un sous-espace vectoriel de E, alors $f(E') = \{f(x) \,|\, x \in E'\}$, l'image de E' par f, est un sous-espace vectoriel de F.*

Démonstration.

□

Proposition. *Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et si $(v_1,\dots,v_n)$ est une famille de E, alors*

$$f\big(\mathrm{Vect}(v_1,\dots,v_n)\big) = \mathrm{Vect}\left(f(v_1),\dots,f(v_n)\right).$$

Démonstration.

$\square$

2) Image d'une application linéaire

Définition (image d'une application linéaire). *Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Le sous-espace vectoriel $f(E)$ de F est appelé image de f et noté $\mathrm{Im}(f)$.*

En d'autres termes, l'image d'une famille génératrice est une famille génératrice de l'image. Ce résultat est particulièrement utile pour déterminer $\mathrm{Im}(f)$. Attention tout espace vectoriel n'admet pas forcément de famille génératrice (finie).

Proposition. *Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et si $(v_1,\dots,v_n)$ est une famille génératrice de E, alors*

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(f(v_1),\dots,f(v_n)\right).$$

Démonstration. Si $(v_1,\dots,v_n)$ engendre E, alors

$$\mathrm{Im}(f) = f(E) = f\big(\mathrm{Vect}(v_1,\dots,v_n)\big) = \mathrm{Vect}\left(f(v_1),\dots,f(v_n)\right). \qquad \square$$

Exemple : *Soit $f : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto (2x-y+3z, x-2y, -x-2y-4z)$. Il s'agit d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.* $\rightsquigarrow$ Exercice.

Déterminons l'image de F.

Exemple : *Considérons* $f : P \in \mathbb{R}[X] \longmapsto XP$.

Ici il n'existe pas de famille génératrice finie, comme on le verra dans le chapitre 26.

3) Noyau d'une application linéaire

Dire qu'un vecteur x est dans $\mathrm{Ker}(f)$ revient à dire que $f(x) = 0_F$.

Définition (noyau d'une application linéaire). *Soit f une application linéaire de E dans F. L'ensemble $\{x \in E \,|\, f(x) = 0_F\}$ est appelé noyau de f et noté $\mathrm{Ker}(f)$.*

Proposition. *Si $f \in \mathscr{L}(E, F)$, alors $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.*

Démonstration.

□

Exemple : *Reprenons l'endomorphisme du paragraphe précédent*

$$f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto (2x - y + 3z, x - 2y, -x - 2y - 4z)$$

Déterminons son noyau.

Remarque : Soit F un sous-espace vectoriel de E. On dit que F est défini sous forme paramétrée si on écrit F comme l'image de E par une application linéaire.

On dit que F est défini par une équation si on écrit F comme le noyau d'une application linéaire sur E.

On dit que F est défini par une famille génératrice (cf. chapitre 20) si on écrit $F = \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$ où $x_1, \ldots, x_n$ sont des vecteurs de E.

Exemples :

- *Reprenons l'endomorphisme du paragraphe précédent $f : P \in \mathbb{R}[X] \longmapsto XP$. Déterminons son noyau.*

- *Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $\varphi : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longmapsto \dfrac{{}^tA - A}{2}$. Montrons qu'il s'agit d'un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le noyau est $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et l'image $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.*

4) Caractérisation de l'injectivité/surjectivité/bijectivité

Proposition. *Soit f une application linéaire de E dans F. Alors*

1. *f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$, c'est-à-dire,*
$$\forall x \in E, \qquad \Big(f(x) = 0_F \quad \Longrightarrow \quad x = 0_E\Big).$$
2. *f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = F$.*
3. *f est bijective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$ et $\mathrm{Im}(f) = F$.*

Ainsi, vérifier que 0_F admet 0_E pour unique antécédent, permet de montrer que n'importe quel vecteur de F admet un unique antécédent.

⚠ Ce n'est vrai que lorsque f est linéaire. Sinon on revient à la méthode classique.

DÉMONSTRATION.

□

Exemples :

- *Reprenons encore une fois l'exemple de l'endomorphisme*
$$f : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto (2x - y + 3z, x - 2y, -x - 2y - 4z).$$

- *Considérons l'application $g : P \in \mathbb{R}_3[X] \longmapsto \big(P(1), P'(1)\big)$.*

5) Image et noyau d'un projecteur

On rappelle qu'un projecteur p de E est un endomorphisme de E tel que $p \circ p = p$.

Ce lemme jouera un rôle essentiel dans le chapitre 25.

On dit que $\mathrm{Id}_E - p$ est le projecteur associé à p.

Lemme. *Si p est un projecteur de E, alors*

1. $\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Im}(p) = \{0\}$,
2. $\mathrm{Id}_E - p$ *est un projecteur de* E,
3. $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_E - p)$ *et* $\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_E - p)$.

DÉMONSTRATION.

□

Exemple : *Reprenons l'exemple du projecteur*

$$f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto (2x + 3y - z, -x - 2y + z, -x - 3y + 2z).$$

IV Caractérisation d'une application linéaire par l'image d'une base

On note souvent $f(\mathscr{F})$ la famille

$$\big(f(e_1), \ldots, f(e_n)\big).$$

Lemme. *Soient $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $\mathscr{F} = (e_1, \ldots, e_n)$ une famille de E.*

1. *Si $\mathscr{F}$ est génératrice et si f est surjective, alors $\big(f(e_1), \ldots, f(e_n)\big)$ est une famille génératrice de F.*
2. *Si $\mathscr{F}$ est libre et si f est injective, alors $\big(f(e_1), \ldots, f(e_n)\big)$ est une famille libre de F.*
3. *Si c'est une base et si f est un isomorphisme de E dans F, alors $\big(f(e_1), \ldots, f(e_n)\big)$ est une base de F.*

Démonstration.

Autrement dit, une application linéaire de E dans F est entièrement définie par la donnée des images des vecteurs d'une base de E. Si on sait que E admet une base $(e_1, \ldots, e_n)$, ce théorème nous assure notamment qu'il suffit de connaître l'image par une application linéaire f des vecteurs de la base, pour connaître toute l'application linéaire : tout vecteur x de E s'écrit sous la forme $\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, où $x_1, \ldots, x_n$ sont des scalaires, uniquement déterminés (ce sont les coordonnées de x dans la base) et on a $f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i)$.

Théorème (caractérisation d'une application linéaire par l'image d'une base). *Supposons que E admette une base $(e_1, \ldots, e_n)$. Donnons-nous $(v_1, \ldots, v_n)$ une famille de vecteurs de F (pas forcément une base). Alors il existe une unique application linéaire f de E dans F telle que, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $f(e_i) = v_i$. Il s'agit de*

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i v_i \end{array} \right.$$

De plus

1. *f est injective si et seulement si $(v_1, \ldots, v_n)$ est une famille libre de F.*
2. *f est surjective si et seulement si $(v_1, \ldots, v_n)$ est une famille génératrice de F.*
3. *f est un isomorphisme si et seulement si $(v_1, \ldots, v_n)$ est une base de F.*

Démonstration.

On déduit de ce théorème qu'une application linéaire est bijective si et seulement si elle envoie une base sur une base... à conditions que des bases existent bien entendu. Nous en reparlerons dans le chapitre 26.

□

Exemple :

Corollaire. *Si E admet une base et si f et g sont deux applications linéaires de E dans F qui coïncident sur une base, alors elles sont égales.*

Remarque : La dérivation (sur $\mathbb{R}_n[X]$) est une bonne illustration du fait qu'il suffit de connaître l'image des vecteurs d'une base pour caractériser une application linéaire, c'est-à-dire pour calculer (de façon unique !) les images de tous les éléments de l'espace. En effet, nous ne connaissons pas la dérivée de tous les polynômes, il nous suffit de connaître la dérivée de $1, X, \ldots, X^n$ (la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$) pour calculer la dérivée de tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ par linéarité de la dérivation. Le théorème ci-dessus généralise cette notion à un espace vectoriel E muni d'une base $(e_1, \ldots, e_n)$: connaître les images de $e_1, \ldots, e_n$ suffit à caractériser une application linéaire f.

Exemple :