Chapitre 20

Introduction aux espaces vectoriels

> On abrège usuellement *espace vectoriel* par *e.v.*

> Par exemple additionner deux fonctions et additionner deux matrices sont deux choses différentes.

Ce chapitre vient clôturer le premier semestre. Au cours de celui-ci nous avons étudié les propriétés des réels, les suites réelles, les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, les polynômes, les vecteurs (solutions de systèmes d'équations), les matrices, etc. Ces objets forment différents ensembles ayant leurs propriétés propres. Mais ils ont deux points communs : sur ces ensembles sont définiess l'addition de deux éléments et la multiplication d'un élément par un réel. Par ailleurs ces deux opérations, bien que n'étant pas exactement identiques, possèdent des propriétés communes. Dans ce chapitre nous allons étudier ces propriétés et découvrir ainsi les points communs entre tous ces ensembles. Il s'agit d'un chapitre introductif, qui sera complété par quatre autres chapitres au second semestre et de nombreux autres en deuxième année. Ils font partie d'une branche des mathématiques appelée algèbre linéaire.

I Espaces vectoriels

1) Définition

> On note temporairement en gras l'addition sur E pour la différentier de celle sur $\mathbb{R}$. On note $\boldsymbol{\cdot}$ la multiplication par un réel d'un vecteur de E et on réserve la notation $\times$ pour le produit de deux réels.

> Quand il n'y a pas d'ambiguïté, on notera simplement 0 au lieu de 0_E et λx au lieu de $\lambda \boldsymbol{\cdot} x$ pour tout $(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E$.

> Ces deux points sont des propriétés dites de distributivité.

Définition (espace vectoriel). *Soient E un ensemble muni :*

- *d'une opération interne appelée addition et notée $\boldsymbol{+}$, i.e. d'une application*
$$\begin{cases} E \times E & \longrightarrow & E \\ (x,y) & \longmapsto & x \boldsymbol{+} y \end{cases}$$
- *d'une multiplication externe notée $\boldsymbol{\cdot}$, i.e. d'une application*
$$\begin{cases} \mathbb{R} \times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda,x) & \longmapsto & \lambda \boldsymbol{\cdot} x \end{cases}$$

On dit que E est un espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$) si

- *L'addition possède dans E les propriétés suivantes :*
  - *Pour tout $(x,y,z) \in E^3$, $(x \boldsymbol{+} y) \boldsymbol{+} z = x \boldsymbol{+} (y \boldsymbol{+} z)$.*
    (l'addition est associative).
  - *Pour tout $(x,y) \in E^2$, $x \boldsymbol{+} y = y \boldsymbol{+} x$.*
    (l'addition est commutative).
  - *Il existe $0_E \in E$ tel que, pour tout $x \in E$, $0_E \boldsymbol{+} x = x \boldsymbol{+} 0_E = x$.*
    (existence d'un élément neutre dans E pour l'addition).
  - *Pour tout $x \in E$, il existe $y \in E$ tel que $x \boldsymbol{+} y = y \boldsymbol{+} x = 0_E$.*
    (tout élément de E admet un symétrique pour l'addition, ou opposé).
- *Pour tous $(x,y) \in E^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$,*
  - $\lambda \boldsymbol{\cdot} (x \boldsymbol{+} y) = \lambda \boldsymbol{\cdot} x \boldsymbol{+} \lambda \boldsymbol{\cdot} y$,
  - $(\lambda + \mu) \boldsymbol{\cdot} x = \lambda \boldsymbol{\cdot} x \boldsymbol{+} \mu \boldsymbol{\cdot} x$,
  - $\lambda \boldsymbol{\cdot} (\mu \boldsymbol{\cdot} x) = (\lambda \times \mu) \boldsymbol{\cdot} x$,
  - $1 \boldsymbol{\cdot} x = x$.

Les éléments de E sont appelés vecteurs et les éléments de $\mathbb{R}$ sont appelés scalaires.

« Un vecteur, c'est un truc qui appartient à un espace vectoriel ». On pourrait munir l'ensemble {chou; banane; carotte} d'une structure d'espace vectoriel, ce qui ferait d'un chou, d'une banane et d'une carotte, des vecteurs !

Remarque : On a dit dans la définition que les éléments de E sont appelé vecteurs. Pour être clair : un vecteur est maintenant, par définition, un élément d'un espace vectoriel, et c'est tout. Ce ne sont plus « des lettres avec des flèches ». On verra dans ce chapitre que des fonctions, des matrices, des suites etc. sont des vecteurs, car appartiennent à des espaces vectoriels.

Exemple : *Il est immédiat que $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel (il vérifie toutes ces propriétés, cf. chapitre 2). Nous donnerons d'autres exemples dans le paragraphe I.3 dont les propriétés d'espaces vectoriels sont héritées de celles de $\mathbb{R}$.*

Remarque : Contrairement aux apparences il y a dix propriétés (et non huit) dans cette définition. Ne pas oublier :

- Le fait que l'addition (ou la somme) de deux vecteurs de E appartient encore à E. On dit qu'un espace vectoriel est stable par somme.
- Le fait que la multiplication d'un vecteur de E par un scalaire appartient encore à E. On dit qu'un espace vectoriel est stable par multiplication externe.

En fait il y a de nombreuses autres propriétés que l'on verra dans le paragraphe suivant mais qui découlent de ces dix propriétés uniquement.

Par exemple l'addition de deux réels, l'addition de deux matrices et l'addition de deux polynômes ne consistent pas en la même opération.

Quand il n'y a pas d'ambiguïté, on note toujours $+$ l'addition et $\cdot$ la multiplication externe. Par contre l'addition de deux vecteurs et la multiplication d'un vecteur par un scalaire n'est pas définie de la même façon d'un espace vectoriel à l'autre. L'unicité des notations est justifiée par le fait qu'elles vérifient les mêmes propriétés.

Proposition. *L'élément neutre 0_E d'un espace vectoriel E est unique. On l'appelle le vecteur nul de E.*

Un espace vectoriel contient donc au moins un vecteur : l'élément neutre pour l'addition. Il s'ensuit que $\varnothing$ n'est pas un espace vectoriel.

DÉMONSTRATION.

$\square$

On note parfois les vecteurs avec des flèches (par exemple $\overrightarrow{x}$ au lieu de x) pour les différentier des scalaires. Mais cela complique les notations. On utilise souvent des lettres grecques pour les scalaires.

Proposition. *Si E est un espace vectoriel, alors le symétrique d'un vecteur x de E est unique et noté $-x$.*

DÉMONSTRATION.

$\square$

Par exemple, on verra dans le paragraphe suivant que $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel. Or on a vu dans le chapitre précédent qu'on l'on ne définissait pas la multiplication de deux matrices de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Définition (soustraction). *Soit E un espace vectoriel. Si x et y sont des vecteurs de E, alors $x+(-y)$ est noté $x-y$.*

La définition d'un espace vectoriel ne fait pas apparaître de loi permettant la multiplication de vecteurs. On ne peut donc pas, a priori, multiplier deux vecteurs entre eux... et encore moins diviser un vecteur par un autre (voir remarque ci-contre).

2) Premières propriétés

On aurait pu charger la définition d'un espace vectoriel de nombreuses autres propriétés. Mais les dix suffisent à en obtenir beaucoup d'autres :

Proposition. *Soit E un espace vectoriel. Soient $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ et $(x,y,z)\in E^3$. Nous avons*

1. *Si $x+y=x+z$, alors $y=z$.*
2. $0\cdot x=0_E$.
3. $\lambda\cdot 0_E=0_E$.
4. $\lambda\cdot(x-y)=\lambda\cdot x-\lambda\cdot y$.
5. $(\lambda-\mu)\cdot x=\lambda\cdot x-\mu\cdot x$.
6. $(-\lambda)\cdot x=\lambda\cdot(-x)=-\lambda\cdot x$.

Dans le point 2, 0 désigne le réel nul.

Démonstration. 1. Supposons que $x+y=x+z$. On a alors

$$\begin{aligned} y &= y+(x+(-x)) && \text{car } 0_E \text{ est neutre et } -x \text{ symétrique de } x,\\ &= (y+x)+(-x) && \text{par associativité,}\\ &= (z+x)+(-x) && \text{par hypothèse,}\\ &= z+(x+(-x)) && \text{par associativité,}\\ &= z && \text{car } 0_E \text{ est neutre et } -x \text{ symétrique de } x. \end{aligned}$$

En gros on ajoute $-x$ (ou on enlève x, c'est la même chose) de chaque côté.

2. Par distributivité, $0\cdot x=(0+0)\cdot x=0\cdot x+0\cdot x$. En ajoutant $-0\cdot x$ de chaque côté de l'égalité, nous obtenons $0_E=0\cdot x$.
3. Par distributivité, $\lambda\cdot 0_E=\lambda\cdot(0_E+0_E)=\lambda\cdot 0_E+\lambda\cdot 0_E$. En ajoutant $-\lambda\cdot 0_E$ de chaque côté, nous obtenons $\lambda\cdot 0_E=0_E$.
4. Par distributivité, $\lambda\cdot x=\lambda\cdot(x-y+y)=\lambda\cdot(x-y)+\lambda\cdot y$. Ainsi, en ajoutant $-\lambda\cdot y$ de chaque côté, on obtient $\lambda\cdot(x-y)=\lambda\cdot x-\lambda\cdot y$.
5. Par distributivité, $\lambda\cdot x=(\lambda-\mu+\mu)\cdot x=(\lambda-\mu)\cdot x+\mu\cdot x$. Ainsi, en ajoutant $-\lambda\cdot y$ de chaque côté, on obtient $(\lambda-\mu)\cdot x=\lambda\cdot x-\mu\cdot x$.
6. Ce dernier point découle des deux égalités suivantes :
   — Par distributivité, $(-\lambda)\cdot x=(0-\lambda)\cdot x=0\cdot x-\lambda\cdot x=0_E-\lambda\cdot x$ et donc $(-\lambda)\cdot x=-\lambda\cdot x$.
   — Par distributivité, $\lambda\cdot(-x)=\lambda\cdot(0_E-x)=\lambda\cdot 0_E-\lambda\cdot x=0_E-\lambda\cdot x$ et donc $\lambda\cdot(-x)=-\lambda\cdot x$. □

Ces propriétés permettent d'aller plus vite dans les calculs et de travailler « comme sur $\mathbb{R}$ » : on pourra les utiliser sans justification.

Proposition. *Soit E un espace vectoriel. Soient $\lambda\in\mathbb{R}$ et $x\in E$. Nous avons :*

$$\lambda\cdot x=0_E \iff \lambda=0 \quad \text{ou} \quad x=0_E.$$

Démonstration.

□

Définition (vecteurs colinéaires). *Deux vecteurs x et y de E sont dits colinéaires si il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $y=\lambda x$ ou $x=\lambda y$.*

En particulier 0_E est colinéaire avec tout vecteur.

3) Exemples usuels

Théorème. *Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Nous définissons sur $\mathbb{R}^n$ une addition $+$ par*

$$\forall u=(u_1,\dots,u_n)\in\mathbb{R}^n,\ \forall v=(v_1,\dots,v_n)\in\mathbb{R}^n,\ u+v=(u_1+v_1,\dots,u_n+v_n),$$

On note (juste pour ce théorème) en gras l'addition sur $\mathbb{R}^n$ pour la différencier de celle de $\mathbb{R}$. Par la suite, on confondra les notations.

et une multiplication externe $\cdot$ par

$$\forall u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n, \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \qquad \lambda \cdot u = (\lambda u_1, \dots, \lambda u_n).$$

L'espace $\mathbb{R}^n$ est alors un espace vectoriel dont l'élément neutre est $(0, \dots, 0)$.

Démonstration. Il est immédiat, par construction, que l'addition de deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est encore un vecteur de $\mathbb{R}^n$, tout comme la multiplication d'un vecteur de $\mathbb{R}^n$ par un réel. Le fait que $\mathbf{+}$ soit associative et commutative découle des propriétés analogues sur $\mathbb{R}$. L'élément neutre est $(0, \dots, 0)$ et tout vecteur $(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ admet pour opposé le vecteur $(-u_1, \dots, -u_n)$. Il reste à vérifier les quatre propriétés de compatibilité des lois $\mathbf{+}$ et $\cdot$: donnons-nous $u = (u_1, \dots, u_n)$ et $v = (v_1, \dots, v_n)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Nous avons :

L'espace $\mathbb{R}^2$ (respectivement $\mathbb{R}^3$) nous est déjà familier : il s'agit de l'ensemble des vecteurs du plan (respectivement. de l'espace). L'espace $\mathbb{R}^n$ est une généralisation : il s'agit d'un ensemble de vecteurs à n coordonnées.

- $$\begin{aligned}\lambda \cdot (u \mathbf{+} v) = \lambda \cdot (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n) &= \big(\lambda(u_1 + v_1), \dots, \lambda(u_n + v_n)\big) \\ &= (\lambda u_1 + \lambda v_1, \dots, \lambda u_n + \lambda v_n) \\ &= (\lambda u_1, \dots, \lambda u_n) \mathbf{+} (\lambda v_1, \dots, \lambda v_n) \\ &= \lambda \cdot u \mathbf{+} \lambda \cdot v.\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}(\lambda + \mu) \cdot u = \big((\lambda + \mu)u_1, \dots, (\lambda + \mu)u_n\big) &= \big(\lambda u_1 + \mu u_1, \dots, \lambda u_n + \mu u_n\big) \\ &= (\lambda u_1, \dots, \lambda u_n) \mathbf{+} (\mu u_1, \dots, \mu u_n) \\ &= \lambda \cdot u + \mu \cdot u.\end{aligned}$$
- $\lambda \cdot (\mu \cdot u) = \lambda \cdot (\mu u_1, \dots, \mu u_n) = (\lambda \mu u_1, \dots, \lambda \mu u_n) = (\lambda\mu) \cdot u.$
- $1 \cdot u = (1 \times u_1, \dots, 1 \times u_n) = u$

Il s'agit donc bien d'un espace vectoriel. □

Exemple :

L'élément neutre de :
- $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ est la fonction nulle sur D.
- $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est la suite nulle.
- $\mathbb{R}[X]$ est le polynôme nul.
- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est la matrice nulle $0_{n,p}$.

Théorème.

1. *Si D est une partie non vide de $\mathbb{R}$, alors $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions de D dans $\mathbb{R}$, est un espace vectoriel.*
2. *L'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles est un espace vectoriel.*
3. *L'ensemble $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel.*
4. *Si $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, l'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ des matrices de taille $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel.*

Démonstration. La démonstration est facile (dans les chapitres qui leur sont dédiés, nous avons énoncé des propositions ou théorèmes permettant de montrer que chacun de ces ensembles est un espace vectoriel) mais fastidieuse (il faut vérifier tous les points de la définition) et laissée en exercice. □

Remarque : Rappelons qu'une suite réelle est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. Plus généralement l'ensemble des applications définies sur un ensemble quelconque et à valeurs dans un espace vectoriel est encore un espace vectoriel :

Théorème. *Soient A un ensemble quelconque et E un espace vectoriel. Pour tout $(f,g) \in \mathcal{F}(A,E)^2$ on définit l'application $f+g \in \mathcal{F}(A,E)$ par*

$$\forall x \in A, \qquad (f+g)(x) = f(x) + g(x).$$

Pour tous $f \in \mathcal{F}(A,E)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit l'application $\lambda \cdot f \in \mathcal{F}(A,E)$ par

$$\forall x \in A, \qquad (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x).$$

L'espace $\mathcal{F}(A,E)$ alors est un espace vectoriel.

On note (juste pour ce théorème) en gris l'addition et la multiplication externe sur $\mathcal{F}(A,E)$ pour la différencier de celles de E. Par la suite, on confondra les notations.

⇝ Exercice.

Désormais (sauf exceptions ou quand il y a ambiguïté ou risque de se tromper), on note $+$ toutes les additions, on omet le $\cdot$ dans les multiplications externes et on note 0 tous les éléments neutres.

Mais dans les exemples, il est vivement conseiller de donner un nom « adéquat » aux vecteurs d'un espace vectoriel E. Par exemple

- (x,y), (x',y'), (a,b), (u,v), (x_1,x_2), etc. si $E = \mathbb{R}^2$.
- (x,y,z), (x',y',z'), (a,b,c), (u,v,w), (x_1,x_2,x_3), etc. si $E = \mathbb{R}^3$.
- P, Q, R, P_1, P_2 (mais pas P', Q'), etc. si $E = \mathbb{R}[X]$.
- f, g, h, f_1, f_2 (mais pas f', g'), etc. si E est un espace de fonctions.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, etc. si $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
- A, B, C, D, M, etc. si $E = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Par exemple appeler x une fonction est un très mauvais choix (mais qui n'est pas interdit) qui conduira inévitablement à des erreurs de compréhension. Il s'agit d'un chapitre abstrait et difficile au premier abord (mais seulement au premier abord) donc inutile de le compliquer en « mal nommant » les vecteurs. Appelle-t-on un chat Médor ?

4) Combinaisons linéaires de vecteurs

Définition. *Une famille finie de E est la donnée d'une liste finie $(x_1,\dots,x_n)$ de vecteurs de E, avec $n \in \mathbb{N}^*$. Le cardinal de cette famille est n.*

Si $n = 0$, on parle aussi de la famille vide et on la note $\varnothing$.

Multiplier des vecteurs de E par un scalaire donne un vecteur de E. Puisqu'une somme de vecteurs de E appartient à encore E, on en déduit (par récurrence immédiate) que :

Proposition. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(x_1,\dots,x_n)$ une famille finie de E. Pour tous réels $\lambda_1,\dots,\lambda_n$, on a*

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n \in E.$$

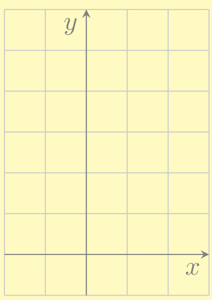
Que l'on note aussi bien sûr $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$.

Définition (combinaison linéaire). *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(x_1,\dots,x_n)$ une famille finie de E. On appelle combinaison linéaire de $x_1,\dots,x_n$ tout vecteur $x \in E$ pour lequel il existe $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifiant*

$$x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n.$$

On dit aussi que x est combinaison linéaire de $x_1,\dots,x_n$.

Exemples :



II Sous-espaces vectoriels

Soit E un espace vectoriel. Nous allons maintenant nous intéresser aux parties de E qui sont toujours des espaces vectoriels.

Pour montrer que $F \neq \varnothing$, on montre en général que $0_E \in F$ (voir proposition ci-contre). Ainsi, quand on se demande si un ensemble F est un sous- espace vectoriel de E, on commence par se demander si $0_E \in F$. Si oui, alors F est non vide et on passe à la suite, sinon alors F n'est pas un sous- espace vectoriel de E. À tous les coups on gagne ! Attention cependant : ce n'est qu'une condition nécessaire ! Si $0_E \in F$, alors F n'est pas forcément un sous- espace vectoriel de E !

1) Notion de sous-espace vectoriel

Définition (sous-espace vectoriel). *Soit $F \subset E$. On dit que F est un sous-espace vectoriel (souvent noté s.e.v en abrégé) de E si :*

- *$F \neq \varnothing$,*
- *pour tout $(x, y) \in F^2$, $x + y \in F$ (F est stable pour l'addition),*
- *pour tout $(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times F$, $\lambda \cdot x \in F$ (F est stable pour la multiplication externe).*

Proposition. *Si F est un sous-espace vectoriel de E alors $0_E \in F$.*

Démonstration.

□

Exemple :

.

La méthode de preuve est toujours la même et systématique :
- On vérifie que le neutre de E est dans F.
- On se donne deux vecteurs de F (avec un nom adéquat) et on vérifie que la somme est encore dans F.
- On se donne un scalaire λ et un vecteur de F et on vérifie que la multiplication de ce vecteur par λ est encore dans F.

Dans l'exemple de l'ensemble des fonctions décroissantes ci-dessus, il ne fallait pas écrire « Si $f \in F$ alors $-f$ est croissante donc $-f \notin F$ ». En effet, si f est la fonction nulle, alors $f \in F$ mais on a aussi $-f \in F$! Ainsi, pour montrer qu'un ensemble n'est pas un sous-espace vectoriel de E, il faut donner un contre-exemple **explicite** (même si, dans l'exemple en question, on pouvait se contenter de dire que si f est décroissante non identiquement nulle, alors $-f$ n'est pas décroissante) !

Ici on pense immédiatement à introduire x et évaluer en $x + 2\pi$: c'est la définition d'une fonction 2π-périodique.

Ce théorème est possède un intérêt pratique fondamental : pour montrer qu'un ensemble F est un espace vectoriel, plutôt que de vérifier tous les points de la définition, il suffit de montrer qu'il est un sous-espace vectoriel d'un ensemble E plus gros dont on sait déjà qu'il s'agit d'un espace vectoriel (souvent E est un espace de suites, de fonctions, de polynômes, de matrices...).

Théorème. *Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors F est un espace vectoriel*

DÉMONSTRATION. Puisque F est stable pour l'addition et la multiplication, les applications $\begin{array}{ccc} F \times F & \longrightarrow & F \\ (x,y) & \longmapsto & x+y \end{array}$ et $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times F & \longrightarrow & F \\ (\lambda,y) & \longmapsto & \lambda y \end{array}$ sont bien définies. Toutes les propriétés d'espace vectoriel sont alors immédiatement vérifiées par F puisque tout vecteur de F est un vecteur de E. □

Proposition. *Soit E un espace vectoriel.*

- *Si G est un sous-espace vectoriel de E et si F est un sous-espace vectoriel de G, alors F est un sous-espace vectoriel de E.*
- *Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E tels que $F \subset G$, alors F est un sous-espace vectoriel de G.*

$\rightsquigarrow$ EXERCICE.

Il existe plusieurs façons de montrer qu'une partie d'un espace vectoriel est un sous-espace vectoriel :

Proposition. *Soient E un espace vectoriel et F une partie de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *F est un sous-espace vectoriel de E.*
2. *$0_E \in F$ et, pour tous $(x,y) \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda x + y \in F$.*
3. *$0_E \in F$ et, pour tous $(x,y) \in F^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda x + \mu y \in F$.*
4. *$0_E \in F$ et F est stable par combinaison linéaire d'un nombre fini de vecteurs de F, c'est-à-dire*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall (x_1,\dots,x_n) \in F^n, \quad \forall (\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \qquad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in F.$$

Pour les points 3 et 4, on peut remplacer la condition $0_E \in F$ par $F \neq \varnothing$ (car on retrouve $0_E \in F$ en prenant des scalaires nuls dans la combinaison linéaire) mais pas pour le point 2.

C'est un raisonnement classique si $1 \Rightarrow 2$, $2 \Rightarrow 3$, $3 \Rightarrow 4$, $4 \Rightarrow 1$, alors les quatre propositions sont équivalentes.

Démonstration.

- Supposons que F est un sous-espace vectoriel de E. On a alors $0_E \in F$. Donnons-nous $(x, y) \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a $\lambda x \in F$ (car F est stable par multiplication externe) puis $\lambda x + y$ (car F est stable par somme). Ainsi $1 \Rightarrow 2$ est vraie.
- Supposons la propriété 2 vraie. On a $F \neq \varnothing$. Donnons-nous $(x, y) \in F^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On a $\mu y = \mu y + 0_E \in F$ (d'après le point 2) et donc $\lambda x + \mu y \in F$ (d'après le point 2). Ainsi $2 \Rightarrow 3$ est vraie.
- On montre $3 \Rightarrow 4$ par récurrence sur n.
- Supposons la propriété 4 vraie. Donnons-nous $(x, y) \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. En prenant $n = 2$, $x_1 = x$, $x_2 = y$ et $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ on obtient $x + y \in F$. En prenant $n = 1$, $x_1 = x$ et $\lambda_1 = \lambda$, on obtient $\lambda x \in F$. Ainsi $4 \Rightarrow 1$ est vraie. □

2) Exemples usuels

a) Sous-espaces vectoriels de polynômes

Théorème. *Si $n \in \mathbb{N}$, alors l'ensemble $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes de degré au plus n à coefficients dans $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.*

Si $\lambda \in \mathbb{R}^*$, alors

$$\deg(\lambda P) = \deg(P)$$

et si $\lambda = 0$,

$$\deg(\lambda P) = -\infty \leqslant \deg(P).$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. Le polynôme nul appartient à $\mathbb{R}_n[X]$. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $Q \in \mathbb{R}_n[X]$. On a $\deg(\lambda P) \leqslant \deg(P) = n$ donc

$$\deg(\lambda P + Q) \leqslant \max(\deg(\lambda P), \deg(Q)) \leqslant n.$$

Ainsi $\lambda P + Q \in \mathbb{R}_n[X]$. □

Exemple :

b) Sous-espaces vectoriels de fonctions

Théorème. *Si I est un intervalle, alors*

- *l'ensemble $C(I, \mathbb{R})$ des applications continues sur I dans $\mathbb{R}$,*
- *l'ensemble $D(I, \mathbb{R})$ des applications dérivables sur I dans $\mathbb{R}$,*
- *l'ensemble $C^1(I, \mathbb{R})$ des applications de classe C^1 sur I dans $\mathbb{R}$*

sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

Démonstration. Ces espaces contiennent la fonction nulle et sont stables par somme et multiplication par un scalaire. □

c) Sous-espaces vectoriels de matrices

L'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles d'ordre n n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car il ne contient pas la matrice nulle.

Théorème. *Si $n \in \mathbb{N}^*$, alors*

- *l'ensemble $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ des matrices diagonales d'ordre n et à coefficients dans $\mathbb{R}$,*
- *l'ensemble $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$ (respectivement $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{R})$) des matrices triangulaires supérieures (respectivement inférieures) d'ordre n et à coefficients dans $\mathbb{R}$,*
- *l'ensemble $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (respectivement $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$) des matrices symétriques (respectivement antisymétriques) d'ordre n et à coefficients dans $\mathbb{R}$,*

sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

DÉMONSTRATION. Ces espaces contiennent la matrice nulle et sont stables par somme et multiplication par un scalaire. □

3) Intersection de sous-espace vectoriel

Proposition. *Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espace vectoriel de E. Alors $F = \bigcap\limits_{i\in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.*

On rappelle qu'un élément est dans une intersection si et seulement s'il est dans tous les ensembles de l'intersection.

DÉMONSTRATION.

Exemple :

L'union de deux sous-espaces vectoriels n'en est pas un en général.

Par exemple, si $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \,|\, P(0) = 0\}$ et $G = \{P \in \mathbb{R}[X] \,|\, P(1) = 0\}$, on a $X \in F \cup G$ (car $X \in F$), $X - 1 \in F \cup G$ (car $X - 1 \in G$) mais $X + X - 1$ n'appartient ni à F ni à G donc n'appartient pas à $F \cup G$. Ce dernier n'est donc pas stable pas somme et donc ce n'est pas un sous-espace vectoriel.

4) Sous-espace engendré par une famille de vecteurs

On verra ci-dessous que $\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$ est le plus petit sous espace vectoriel contenant $x_1, \ldots, x_n$. Il est donc cohérent de poser

$$\mathrm{Vect}(\varnothing) = \{0_E\}.$$

puisque $\{0_E\}$ est le plus petit sous espace vectoriel de E.

Définition (sous-espace vectoriel engendré par une famille finie). *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle sous-espace vectoriel engendré par une famille finie $(x_1, \ldots, x_n)$ de E, et on note $\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$, l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $x_1, \ldots, x_n$, c'est-à-dire,*

$$\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \,\middle|\, (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

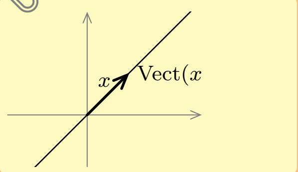
On pose $\mathrm{Vect}(\varnothing) = \{0_E\}$.

Remarques :

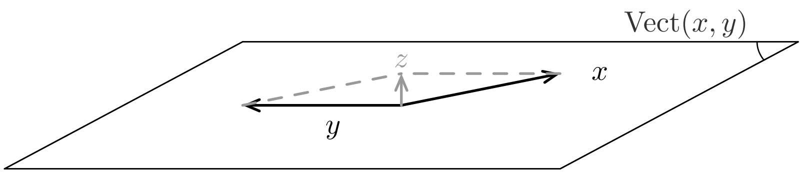
- On a $x \in \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$ si et seulement si il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$.

- Si $x_1, \ldots, x_n$ sont n vecteurs de E, alors toute combinaison linéaire de ces vecteurs appartient à E et par conséquent $\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n) \subset E$.

Exemples :



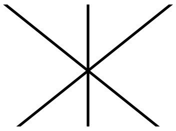
Le théorème ci-dessous sera démontré dans le chapitre 26, quand nous parlerons de dimension. Sans rentrer dans les détails, disons juste qu'il est intuitif que $\mathbb{R}^2$ (le plan) est de dimension 2 et que $\mathbb{R}^3$ (l'espace) est de dimension 3. Nous montrerons qu'un sous-espace vectoriel de E a une dimension inférieure à celle de E, et donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ a soit une dimension nulle (c'est un point donc $\{0\}$), soit une dimension égale à 1 (c'est une droite vectorielle), soit égale à 2 (c'est le plan tout entier). Le résultat concernant $\mathbb{R}^3$ est tout aussi intuitif.

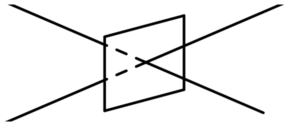


Théorème (admis provisoirement).

- *Les seuls sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ sont $\{0\}$, les droites vectorielles et $\mathbb{R}^2$ tout entier.*
- *Les seuls sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ sont $\{0\}$, les droites vectorielles, les plans vectoriels et $\mathbb{R}^3$ tout entier.*

Remarque : Géométriquement, une droite vectorielle est une droite passant par l'origine (on rappelle que 0_E appartient à tous les sous-espaces vectoriels de E, et donc des droites vectorielles sont toujours sécantes en 0) et un plan vectoriel est un plan passant par l'origine. Ci-dessous, trois sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ (à gauche) et trois sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ (à droite).





Dans la troisième écriture, on dit que F est définie sous forme paramétrée, c'est-à-dire F est écrite comme l'image de $\mathbb{R}^3$ par une application. On définira cette notion plus proprement dans le chapitre 21.

Remarque : Dans l'exemple ci-dessus, nous avons vu deux façons de définir le sous-espace vectoriel F :

- par une équation : $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, 3x + 5y = 2t + z\}$
- par une famille génératrice : $F = \operatorname{Vect}\big((1, 0, 3, 0), (0, 1, 5, 0), (0, 0, -2, 1)\big)$.

On peut encore écrire $F = \big\{(x, y, 3x + 5y - 2t, t) \,\big|\, (x, y, t) \in \mathbb{R}^3\big\}$.

Proposition. *Si $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille finie de E. Alors $\operatorname{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ est un sous-espace vectoriel de E qui contient les vecteurs $x_1, \dots, x_n$.*

Démonstration.

Comme $\operatorname{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ est un sous-espace vectoriel de E, il contient 0. C'est évident : 0 s'écrit comme combinaison linéaire de toute famille finie de vecteurs (en prenant tous les scalaires égaux à 0).

On en déduit que $\operatorname{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ est l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E contenant les vecteurs $x_1, \dots, x_n$.

Remarque : Donnons-nous G un sous-espace vectoriel de E qui contient les vecteurs $x_1, \dots, x_n$. Si $y \in \operatorname{Vect}(x_1, \dots, x_n)$, alors il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $y = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$. Puisque G est un sous-espace vectoriel, on a $y = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n \in G$. Par conséquent $\operatorname{Vect}(x_1, \dots, x_n) \subset G$. Cela montre que $\operatorname{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ est inclus dans tout sous-espace vectoriel content $x_1, \dots, x_n$: il s'agit du plus petit (au sens de l'inclusion) sous-espace vectoriel de E contenant les vecteurs $x_1, \dots, x_n$.

Puisque le Vect ne dépend pas de l'ordre des vecteurs, on peut effectuer les opérations 2 et 3 sur tous les vecteurs, et pas forcément sur le premier, et on peut « supprimer » tous les vecteurs superflus (opérations 4 et 5), pas forcément le dernier.

Proposition. *Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille finie de E.*

1. *Le sous-espace engendré par une famille de vecteurs ne dépend pas de l'ordre des vecteurs.*
2. $\forall \alpha \in \mathbb{R}^*$, $\operatorname{Vect}(\alpha x_1, x_2, \dots, x_n) = \operatorname{Vect}(x_1, \dots, x_n)$.
3. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall i \in [\![2\,;n]\!]$, $\operatorname{Vect}(x_1 + \alpha x_i, x_2, \dots, x_n) = \operatorname{Vect}(x_1, \dots, x_n)$.
4. *Si $y \in \operatorname{Vect}(x_1, \dots, x_n)$, alors $\operatorname{Vect}(x_1, \dots, x_n, y) = \operatorname{Vect}(x_1, \dots, x_n)$.*
5. $\operatorname{Vect}(x_1, \dots, x_n, 0) = \operatorname{Vect}(x_1, \dots, x_n)$.

DÉMONSTRATION. 1. Une combinaison linéaire de $x_1, \dots, x_n$ est une somme donc, par commutativité et associativité, elle ne dépend pas de l'ordre dans lequel on somme les vecteurs.

Le Vect est donc invariant par opération élémentaire (permutation de deux vecteurs, multiplication d'un vecteur par un scalaire non nul, ajout à un vecteur d'un autre vecteur multiplié par un scalaire) sur les vecteurs $x_1, \dots, x_n$.

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Soit $x \in \mathrm{Vect}(\alpha x_1, x_2, \dots, x_n)$. Il existe alors $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$x = \lambda_1(\alpha x_1) + \sum_{k=2}^{n} \lambda_k x_k = (\alpha\lambda_1)x_1 + \sum_{k=2}^{n} \lambda_k x_k \in \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n).$$

Ainsi $\mathrm{Vect}(\alpha x_1, x_2, \dots, x_n) \subset \mathrm{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Réciproquement donnons-nous $x \in \mathrm{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Il existe alors $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = \frac{\lambda_1}{\alpha}(\alpha x_1) + \sum_{k=2}^{n} \lambda_k x_k \in \mathrm{Vect}(\alpha x_1, \dots, x_n).$$

Ainsi $\mathrm{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_n) \subset \mathrm{Vect}(\alpha x_1, x_2, \dots, x_n)$. D'où l'égalité.

3. Soient $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $i \in [\![2\,;n]\!]$. Soit $x \in \mathrm{Vect}(x_1 + \alpha x_i, x_2, \dots, x_n)$. Il existe alors $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$x = \lambda_1(x_1 + \alpha x_i) + \sum_{k=2}^{n} \lambda_k x_k = \sum_{k=1}^{i-1} \lambda_k x_k + (\lambda_1\alpha + \lambda_i)x_i + \sum_{k=i+1}^{n} \lambda_k x_k$$
$$\in \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n).$$

Ainsi $\mathrm{Vect}(x_1 + \alpha x_i, x_2, \dots, x_n) \subset \mathrm{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Réciproquement donnons-nous $x \in \mathrm{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Il existe alors $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = \lambda_1(x_1 + \alpha x_i) + \sum_{k=2}^{i-1} \lambda_k x_k + (\lambda_i - \lambda_1\alpha)x_i + \sum_{k=i+1}^{n} \lambda_k x_k$$
$$\in \mathrm{Vect}(x_1 + \alpha x_i, \dots, x_n).$$

Ainsi $\mathrm{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_n) \subset \mathrm{Vect}(x_1 + \alpha x_i, x_2, \dots, x_n)$. D'où l'égalité.

4. Si $x \in \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$, alors il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k + 0 \cdot y \in \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n, y).$$

Remarquons que cette inclusion reste vraie même si $y \notin \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$.

Ainsi $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n) \subset \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n, y)$. Réciproquement donnons-nous $x \in \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n, y)$. Il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que

$$x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k + \lambda_{n+1} y.$$

Comme $y \in \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$, il existe $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $y = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$ et donc

$$x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k + \lambda_{n+1} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k = \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k + \lambda_{n+1}\alpha_k) x_k \in \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n).$$

Ainsi $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n, y) \subset \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$. D'où l'égalité.

Dans un Vect, s'il y a deux vecteurs colinéaires, on peut donc en enlever un (en effet, l'un est combinaison linéaire de l'autre donc combinaison linéaire de tous les vecteurs en affectant les vecteurs restants du scalaire 0).

5. On applique le point précédent avec $y = 0$ puisque 0 est combinaison linéaire de toute famille finie. □

Exemple : *Si* $F = \mathrm{Vect}(X + X^3, 1, X, X^2 + 1, X^3)$, *alors*

III Familles génératrices, libres, liées et bases

On se donne E un espace vectoriel. Nous allons chercher désormais des vecteurs $x_1, \dots, x_n$ d'un espace vectoriel E tel que tout vecteur x de E peut s'écrire comme combinaison linéaire (unique ou pas) de $x_1, \dots, x_n$.

1) Familles génératrices

Une telle famille n'existe pas forcément. Si elle existe on dit que E est de dimension finie (cf. chapitre 26).

Définition (famille génératrice). *On dit qu'une famille finie $(x_1, \dots, x_n)$ de E est génératrice de E (ou qu'elle engendre E) si*

$$\forall x \in E, \qquad \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \qquad x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i.$$

Autrement dit si tout vecteur de E s'écrit comme combinaison linéaire de $(x_1, \dots, x_n)$, c'est-à-dire $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n) = E$.

Comme $\mathrm{Vect}(\varnothing) = \{0\}$ par convention, on en déduit que $\varnothing$ est génératrice de $\{0\}$. Cette convention justifiera le fait que $\{0\}$ est de dimension nulle (cf. chapitre 26).

Exemples :

Remarque : Pour chercher une famille génératrice d'un espace vectoriel F, on se donne un vecteur x de F quelconque et on cherche :

- $n \in \mathbb{N}^*$ et des vecteurs $x_1, \dots, x_n$ de F (qui **ne dépendent pas** de x),
- des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (qui dépendent de x).

tels que $x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$. On conclut alors que $F = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$.

Il faut donc trouver le moyen de faire apparaître des scalaires : des coordonnées si les vecteurs sont des matrices, des coefficients si les vecteurs sont des polynômes par exemple.

Exemple : *Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \,|\, P(1) = 0\}$. On a vu dans le paragraphe II.2.a que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.*

Par définition, $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille génératrice de $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$: en effet, par définition du Vect, tout élément de $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ est combinaison linéaire de $x_1, \dots, x_n$. En d'autres termes, une famille est toujours génératrice de l'espace qu'elle engendre...

Exemple : *Soit* $F = \text{Vect}\big((1,2,3),(-2,1,-4)\big)$.

2) Familles liées, familles libres

On se donne une famille finie $(x_1, \ldots, x_n)$ de vecteurs de E.

Bien faire la distinction entre les deux phrases suivantes :

- les scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont tous non nuls, i.e. $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ appartient à $(\mathbb{R}\backslash\{0\})^n$.
- les scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont non tous nuls, i.e. $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ appartient à $\mathbb{R}^n\backslash\{0, \ldots, 0\}$: il existe au moins un λ_i non nul.

Définition (famille liée). *On dit que la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est liée si il existe des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ non tous nuls tels que $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0$.*

C'est la définition officielle mais la caractérisation ci-dessous est plus parlante :

Proposition. *La famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est liée si et seulement si l'un des vecteurs de la famille est combinaison linéaire des autres, c'est-à-dire*

$$\exists i \in [\![1\,;n]\!], \qquad x_i \in \operatorname{Vect}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

DÉMONSTRATION.

□

Il découle de la proposition précédente que :

Corollaire. *Deux vecteurs x et y sont colinéaires si et seulement si (x, y) est liée.*

On rappelle que le vecteur nul est combinaison linéaire de toute famille de vecteurs. On rappelle que, si deux vecteurs sont colinéaires, l'un des combinaison linéaire de l'autre et donc de tous les autres vecteurs de la famille.

Corollaire. *Si la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ contient le vecteur nul ou bien deux vecteurs colinéaires, alors elle est liée.*

Définition (famille libre). *On dit que la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est libre si elle n'est pas liée, c'est-à-dire,*

$$\forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \qquad \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0 \right).$$

On convient qu'une famille vide de vecteurs est libre.

Autrement dit une famille est libre si la seule combinaison linéaire nulle des vecteurs de la famille est celle où tous les scalaires sont nuls.

Dans le cas où on a un ou deux vecteurs, la situation est très simple et cela se voit directement.

Proposition.

- *Une famille à un élément* (x_1) *est libre si et seulement si* x_1 *est non nul.*
- *Une famille à deux éléments* (x_1, x_2) *est libre si et seulement si* x_1 *et* x_2 *sont non colinéaires.*

Attention, ce n'est plus vrai si on a au moins trois vecteurs ! Une famille dont tous les vecteurs sont deux à deux non colinéaires n'est pas forcément libre, voir le premier exemple ci-contre. À partir de trois vecteurs, il n'y a rien d'autre que la définition pour montrer qu'une famille est libre. Plus précisément, pour montrer qu'une famille $(x_1, \dots, x_n)$ est libre, on commence par se donner n scalaires (car il y a n vecteurs dans la famille) $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0$. En général on se ramène à la résolution d'un système linéaire.
• Si on montre que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$, alors la famille est libre.
• Si la résolution du système conduit à une solution non nulle, alors on obtient une combinaison linéaire nulle des vecteurs $x_1, \dots, x_n$ avec des scalaires non tous nuls et la famille est liée.

Démonstration. Le premier point découle directement de la définition. Le deuxième est une reformulation du premier corollaire ci-dessus.

Exemples :

Méthode très classique dans cet exemple : montrer que des familles de n fonctions (avec n petit) sont libres, revient à montrer que n scalaires sont nuls donc on essaie de trouver un système de n équations et de le résoudre. On peut essayer d'évaluer la combinaison linéaire nulle en n réels bien choisis pour obtenir ces n équations. Même technique pour les familles de suites.

Proposition. *Une sous famille d'une famille libre est libre.*

Démonstration.

□

Remarque : Par contraposée, si l'on rajoute des vecteurs à une famille liée, alors on obtient une famille liée. Attention, si on ajoute des vecteurs à une famille libre, on n'obtient pas nécessairement une famille libre ! On peut avoir par exemple (e_1, e_2) libre, (e_2, e_3) libre, (e_1, e_3) libre et (e_1, e_2, e_3) liée (voir le premier exemple de famille liée donnée dans ce paragraphe). De plus, ce n'est plus vrai pour une famille génératrice, au contraire ! Si on rajoute des vecteurs à une famille génératrice, alors elle reste génératrice.

$\rightsquigarrow$ Exercice.

Terminons par un exemple important dans la pratique :

Définition. *On dit qu'une famille finie de polynômes* ***non nuls*** *est échelonnée en degré si elle est constituée de polynômes de degrés deux à deux distincts.*

Exemple :

La réciproque est fausse : une famille de polynômes peut être libre même si deux polynômes de la famille sont de même degré. Par exemple la famille $(X+1, X)$ est libre (puisque $X+1$ et X ne sont pas colinéaires) mais pas échelonnée en degré.

Proposition. *Toute famille de polynômes échelonnée en degré est libre.*

Démonstration.

□

3) Bases

Définition (base). *Une famille libre et génératrice de E est appelée base de E.*

Remarques :

- Par convention, $\varnothing$, la famille vide de vecteurs de E, est une famille libre et elle est génératrice de $\{0_E\}$. Par conséquent il s'agit d'une base de $\{0_E\}$. C'est même la seule base.

En effet, comme dit plus haut, c'est par définition une famille génératrice de $\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$.

La réciproque est vraie : si, pour tout $x \in E$, il existe des uniques scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$, alors $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E. En effet l'existence des scalaires garantit qu'elle est génératrice et l'unicité qu'elle est libre (puisqu'on obtient 0 en prenant une combinaison linéaire avec des scalaires nuls et qu'il n'y en a pas d'autre façon de le faire par unicité).

- Si $(x_1, \ldots, x_n)$ est une famille libre de E, alors c'est une base du sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$. Si elle est liée alors on essaie de simplifier la famille (enlever des vecteurs nuls ou plus généralement des combinaisons linéaires d'autres vecteurs de la famille) jusqu'à obtenir une famille libre.

Théorème. *Supposons que E admette une base $(e_1, \ldots, e_n)$. Alors tout vecteur $x \in E$ s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire de $e_1, \ldots, e_n$: il existe un unique $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que*

$$x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n.$$

Les scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont appelés coordonnées de x dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$. On appelle matrice colonne des coordonnées de x dans la base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ la matrice

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}).$$

Démonstration.

□

Terminons ce chapitre par quelques exemples de bases usuelles à connaitre :

Théorème.

- *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, notons $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ (le 1 étant à la $i^{\text{ème}}$ position). La famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$. Elle est appelée la base canonique de $\mathbb{R}^n$.*
- *Soit $n \in \mathbb{N}$. La famille $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Elle est appelée la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.*
- *Soient n et p des entiers naturels non nuls. La famille $(\mathrm{E}_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ des matrices élémentaires de taille $n \times p$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Elle est appelée la base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.*

Démonstration.

- Nous avons déjà montré dans les paragraphes précédents que $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ engendre $\mathbb{R}_n[X]$ et qu'il s'agit d'une famille libre. C'est donc une base par définition.
- Soit $M = (m_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On a vu dans le paragraphe I.2.a du chapitre 19 que $M = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} m_{i,j} E_{i,j}$. Ainsi $\left(\mathrm{E}_{i,j}\right)_{i,j}$ est une famille génératrice. Ensuite, donnons-nous np scalaires $\lambda_{1,1}, \dots, \lambda_{1,p} \dots, \lambda_{n,1}, \dots, \lambda_{n,p}$ tels que $\mathrm{O}_{n,p} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} \lambda_{i,j} E_{i,j}$. C'est équivalent à écrire que la matrice $\Lambda = (\lambda_{i,j})_{i,j}$ est la matrice nulle et donc que ses coefficients sont nuls. Ainsi la famille $\left(\mathrm{E}_{i,j}\right)_{i,j}$ est liée donc est une base. □

Ne pas confondre unicité des coefficients dans une base et unicité d'une base : il y a une infinité de bases et, dans chaque base, il y unicité des coefficients. Changer de base, change les coefficients d'un même vecteur.

Exemple :