Chapitre 2

# Propriétés des nombres réels

## I Les ensembles de nombres

### 1) Existence admise des ensembles de nombres

Nous admettons l'existence et les principales propriétés des ensembles de nombres suivants :

- L'ensemble $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \ldots\}$ des nombres entiers naturels.
- L'ensemble $\mathbb{Z} = \{\ldots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \ldots\}$ des nombres entiers relatifs.
- L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels.
- L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

Nous avons les inclusions strictes suivantes : $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$.

Ces ensembles contiennent $0$ et on note $\mathbb{N}^* = \mathbb{N}\backslash\{0\}$, $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q}\backslash\{0\}$ et $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

> On dit que l'ensemble $E$ est strictement inclus dans l'ensemble $F$, si $E \subset F$ et $E \neq F$. On note alors $E \subsetneq F$, cf. chapitre 9.

L'ensemble $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ des réels qui ne sont pas rationnels et appelé ensemble des nombres irrationnels.

### 2) Opérations dans $\mathbb{R}$

#### a) Addition, soustraction, multiplication et division

> Définir une opération sur un ensemble $E$ consiste à associer à toute paire d'éléments de $E$ un autre élément de $E$. Par exemple l'addition (resp. la multiplication) sur $\mathbb{R}$ associe à deux réels $x$ et $y$ leur somme (resp. leur produit), notée $x + y$ (noté $x \cdot y$).

On admet les propriétés suivantes :

**Proposition.**

- *L'ensemble $\mathbb{R}$ est muni d'une opération, appelée addition, notée $+$, et qui vérifie :*
  - *Pour tous réels $x$ et $y$, $x + y = y + x$ (commutativité).*
  - *Pour tous réels $x$, $y$ et $z$, $x + (y + z) = (x + y) + z$ (associativité).*
  - *Pour tout réel $x$, $0 + x = x + 0 = x$ ($0$ est l'élément neutre pour l'addition).*
  - *Tout réel $x$ admet un opposé, noté $-x$ : $x + (-x) = (-x) + x = 0$.*
- *Pour tous réels $x$ et $y$, on note $x - y = x + (-y)$ la soustraction de $x$ par $y$.*
- *L'ensemble $\mathbb{R}$ est muni d'une opération appelée multiplication, notée $\cdot$ (ou $\times$), et qui vérifie :*
  - *Pour tous réels $x$ et $y$, $x \cdot y = y \cdot x$ (commutativité).*
  - *Pour tous réels $x$, $y$ et $z$, $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (associativité).*
  - *Pour tout réel $x$, $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ ($1$ est l'élément neutre pour la multiplication).*
  - *Tout réel $x$ non nul admet un inverse, noté $x^{-1}$ ou $\frac{1}{x}$ : $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$.*
  - *Pour tous réels $x$, $y$ et $z$, $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ (la multiplication est distributive par rapport à l'addition).*
- *Si $y \neq 0$, on note $\frac{x}{y} = x \cdot y^{-1}$ la division de $x$ par $y$.*

> Pour tous réels $x$ et $y$, s'il n'y a pas d'ambiguité, on note plutôt $xy$ au lieu de $x \cdot y$ ou de $x \times y$.

> ⚠ On ne divise JAMAIS par $0$. A chaque fois que l'on divise, on doit avoir ça en tête.

Ces propriétés permettent d'en obtenir beaucoup d'autres :

**Proposition.** *Pour tout réel $x$, $0 \cdot x = 0$ et $(-1) \cdot x = -x$.*

> Nous referons ce type de preuve dans le chapitre 20.

Démonstration. Soit $x$ un réel. On a

- $0x = (0 + 0)x = 0x + 0x$ donc $0x = 0x - 0x = 0$.
- $0 = 0x = (1 + (-1))x = 1x + (-1)x = x + (-1)x$ donc $-x = (-1)x$. □

On aura l'occasion de le redire mais en mathématiques, la plupart du temps on cherche à factoriser et non à développer.

**Proposition (développement/factorisation).** *Soient $x$, $y$, $z$ et $t$ des réels. On a*

- $xy - xz = x(y - z)$.
- $xz + xt + yz + yt = (x + y)(z + t)$.
- $xz - xt - yz + yt = (x - y)(z - t)$.
- $xz + xt - yz - yt = (x - y)(z + t)$.

$\rightsquigarrow$ Exercice.

Ne surtout pas oublier le cas où $x = 0$ ! En effet, on ne simplifie (en divisant) par $x$ que s'il est non nul.

**Proposition (simplification de termes).** *Soient $x$, $y$ et $z$ des réels. On a*

- *Si $x + y = x + z$, alors $y = z$.*
- *Si $xy = xz$, alors $\underline{x = 0}$ ou $y = z$.*

Démonstration. Pour le premier point, on soustrait $z$ de chaque côté. Pour le deuxième, ou bien $x = 0$, ou bien $x \neq 0$ et alors on divise par $x$ de chaque côté. $\square$

**Corollaire.** *Si $x$ et $y$ sont deux réels tels que $xy = 0$, alors $x = 0$ ou $y = 0$.*

On admet la proposition suivante :

$\mathbb{N}$ n'est pas stable par soustraction (par exemple : $2 - 3 = -1 \notin \mathbb{N}$). $\mathbb{N}^*$ et $\mathbb{Z}^*$ ne sont pas stables par division (par exemple : $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$). $\mathbb{Q}^*$ et $\mathbb{R}^*$ ne sont pas stables par division car, encore une fois, on ne peut pas diviser par $0$.

**Proposition (stabilité des ensembles de nombres).**

- *L'ensemble $\mathbb{N}$ est stable par addition et multiplication, i.e. pour tous $x$ et $y$ dans $\mathbb{N}$, $x + y \in \mathbb{N}$ et $xy \in \mathbb{N}$.*
- *L'ensemble $\mathbb{Z}$ est stable par addition, soustraction et multiplication, i.e. pour tous $x$ et $y$ dans $\mathbb{Z}$, $x + y \in \mathbb{Z}$, $x - y \in \mathbb{Z}$ et $xy \in \mathbb{Z}$.*
- *L'ensemble $\mathbb{Q}$ est stable par addition, soustraction et multiplication, i.e. pour tous $x$ et $y$ dans $\mathbb{Q}$, $x + y \in \mathbb{Q}$, $x - y \in \mathbb{Q}$ et $xy \in \mathbb{Q}$. L'ensemble $\mathbb{Q}^*$ est également stable par division, i.e. pour tous $x$ et $y$ dans $\mathbb{Q}^*$, $\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}^*$.*

### b) Le cas des entiers

**Définition (parité d'un entier).** *Un nombre entier $n$ est dit pair si le nombre $\frac{n}{2}$ est un entier et impair sinon.*

Nous admettons la proposition suivante (qui découle du théorème de la division euclidienne pour le cas impair) :

**Proposition.** *Un nombre entier $n$ est pair si et seulement si il existe un entier $p$ tel que $n = 2p$. Un nombre entier $n$ est impair si et seulement si il existe un entier $p$ tel que $n = 2p + 1$.*

### c) Le cas des rationnels

La notation sous forme de fraction de l'inverse d'un réel non nul nous permet d'écrire

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \,\middle|\, a \in \mathbb{Z},\, b \in \mathbb{Z}^* \right\}.$$

Si $q = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$, on dit que $a$ est le numérateur de $q$ et $b$ le dénominateur de $q$. L'écriture d'un rationnel n'est pas unique : si $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$ alors, pour tout $c \in \mathbb{Z}^*$, $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$. Si $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ n'admettent pas de diviseur commun autre que $1$ et $-1$ dans $\mathbb{Z}$, alors on dit que le rationnel $\frac{a}{b}$ est écrit sous forme irréductible (et l'écriture est alors unique).

On dit que $d \in \mathbb{Z}^*$ est un diviseur commun des entiers $m$ et $n$ si $\frac{m}{d} \in \mathbb{Z}$ et $\frac{n}{d} \in \mathbb{Z}$.

**Proposition (opérations dans $\mathbb{Q}$).** *Soient $a$, $c$ des entiers et $b$, $d$ des entiers non nuls. On a*

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}, \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}, \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \quad \text{et} \quad \left(\frac{b}{d}\right)^{-1} = \frac{d}{b}.$$

Rappelons qu'un entier naturel est premier s'il est supérieur ou égal à $2$ et s'il n'est divisible que par $1$ et lui-même.

Hors de question de tout mettre sur $6 \cdot 35 \cdot 10 \cdot 21$. Ces quatre termes ont plusieurs facteurs communs.

La calculatrice est interdite en concours. Il est temps d'apprendre à simplifier une somme de fractions « à la main ». Pour cela, on met au dénominateur non pas le produit des dénominateurs mais le « plus grand multiple commun » des dénominateurs (pour cela on commence par décomposer chaque terme en produit de facteurs premiers). Ensuite, on essaie de factoriser au maximum.

*Simplifions* $x = \frac{1}{6} - \frac{9}{35} + \frac{3}{10} - \frac{8}{21}$.

### d) Puissances entières

En particulier, on pose aussi $0^0 = 1$

**Définition (puissance entière).** *Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on appelle puissance $n^{\text{ième}}$ de $x$, et note $x^n$, le réel $x^n = \underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{n \text{ termes}}$. On pose $x^0 = 1$.*

*Si $n \in \mathbb{Z} \backslash \mathbb{N}$ et $x \neq 0$, on définit $x^n = \underbrace{\frac{1}{x} \times \frac{1}{x} \times \cdots \times \frac{1}{x}}_{-n \text{ termes}}$.*

Vous avez bien lu : le produit ci-contre contient $-n$ termes (on suppose que $n < 0$). Par exemple, si $n = -2$, alors $x^{-2} = \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x} \times \frac{1}{x}$, et ce produit contient $2 = -(-2)$ termes.

**Remarques :**

- Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On a $x^1 = x$ et, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $x^{n+1} = x^n \cdot x = x \cdot x^n$ (ce dernier point est encore valable si $x = 0$ et $n \in \mathbb{N}$).
- Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $x^n = 0$ si et seulement si $x = 0$. ⇝ Exercice.

**Proposition.** *Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $(-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair,} \\ -1 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$*

**Remarque :** En particulier, si $n \in \mathbb{Z}$, alors $\boxed{\phantom{xxxxxx}}$, $\boxed{\phantom{xxxxx}}$,

$\boxed{\phantom{xxxxxxxxxxxxxxxxxxxx}}$

La convention $x^0 = 1$ est naturelle : si $x \neq 0$ alors, pour passer de $x^3$ à $x^2$ on divise par $x$, puis pour passer de $x^2$ à $x^1$ on divise encore par $x$, donc pour passer de $x^1$ à $x^0$, il est naturel de vouloir diviser par $x$ et on obtient alors $x^0 = 1$.

**Proposition.** *Soient $n$ et $p$ deux entiers relatifs et $x$ et $y$ deux réels non nuls. Nous avons :*

- $(xy)^n = x^n y^n$
- $x^{n+p} = x^n x^p$
- $(x^n)^p = x^{np}$
- $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$
- $x^{n-p} = \frac{x^n}{x^p}$
- $x^{-n} = \left(\frac{1}{x}\right)^n = \frac{1}{x^n}$.

⇝ Exercice.

***Exemple :*** *Soit $n \in \mathbb{Z}$. Simplifions $x = (-1)^{-7n+2021} - \frac{1}{(-1)^{5-4n}}$.*

Il est essentiel de ne pas apprendre ces formules par coeur sans les comprendre. Elles sont très simples : par exemple

Et surtout pas $x^n x^p = x^{np}$ ou $(x^n)^p = x^{n^p}$.

Quelques identités très remarquables : si $x$ est un réel, alors
$x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$
$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$
$x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$
$x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$
$4x^2 + 4x + 1 = (2x+1)^2$
$4x^2 - 4x + 1 = (2x-1)^2$

**Proposition (identités remarquables).** *Soient $x$ et $y$ deux réels. Nous avons*

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2, \quad x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2, \quad x^2 - y^2 = (x+y)(x-y).$$

## 3) Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

### a) Définitions et propriétés

La proposition suivante est admise :

**Proposition.** *L'ensemble $\mathbb{R}$ est muni d'une relation d'ordre, notée $\leqslant$ qui vérifie :*

- *Pour tout réel $a$, $a \leqslant a$ (réflexivité).*
- *Pour tous réels $a$ et $b$, $a \leqslant b$ ou $b \leqslant a$ (ordre total).*
- *Pour tous réels $a$, $b$ et $c$ :*
  - *Si $a \leqslant b$ et $b \leqslant a$, alors $a = b$ (antisymétrie).*
  - *Si $a \leqslant b$ et $b \leqslant c$, alors $a \leqslant c$ (transitivité).*
  - *Si $a \leqslant b$, alors $a + c \leqslant b + c$ (compatibilité avec l'addition).*
  - *Si $a \leqslant b$ et $0 \leqslant c$, alors $ac \leqslant bc$ (compatibilité avec la multiplication).*

En mathématiques françaises, lorsqu'on dit « $x$ est inférieur (resp. supérieur) à $y$ », il est toujours sous-entendu « $x$ est inférieur (resp. supérieur) ou égal à $y$ ».

**Définition.** *Soient $x$ et $y$ des réels. On dit que*

- *$x$ est inférieur (ou égal) à $y$ lorsque $x \leqslant y$.*
- *$x$ est supérieur (ou égal) à $y$, et on note $x \geqslant y$, lorsque $y \leqslant x$.*
- *$x$ est strictement inférieur à $y$, et on note $x < y$, lorsque $x \leqslant y$ et $y \neq x$.*
- *$x$ est strictement supérieur à $y$, et on note $x > y$, lorsque $x \geqslant y$ et $y \neq x$.*

**Définition.** *Un réel $x$ est dit :*

- *positif si $x \geqslant 0$,*
- *négatif si $x \leqslant 0$,*
- *strictement positif si $x > 0$,*
- *strictement négatif si $x < 0$.*

• Si $x < y$, alors $x \leqslant y$ (mais la réciproque est fausse).
• Si $x > y$, alors $x \geqslant y$ (mais la réciproque est fausse).
• Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x \leqslant x$ et $x \geqslant x$.

On en déduit les règles suivantes :

Multiplier par un réel négatif de chaque côté d'une inégalité change le sens de l'inégalité.

**Proposition.** *Soient $a$, $b$, $c$ et $d$ des réels.*

- *Si $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$, alors $a + c \leqslant b + d$.*
  *En particulier la somme de deux réels positifs (respectivement négatifs) est positive (respectivement négative).*
- *Si $a \leqslant b$ et $c \leqslant 0$, alors $ac \geqslant bc$.*
  *En particulier $a \leqslant b$ si et seulement si $-a \geqslant -b$.*
- *On a $ab \geqslant 0$ (respectivement $ab \leqslant 0$) si et seulement si $a$ et $b$ ont le même signe (respectivement sont de signe contraire).*
- *Si $0 \leqslant a \leqslant b$ et $0 \leqslant c \leqslant d$, alors $ac \leqslant bd$.*
- *Si ($a > 0$ et $b > 0$) ou ($a < 0$ et $b < 0$), alors $a \leqslant b$ si et seulement si $\dfrac{1}{a} \geqslant \dfrac{1}{b}$.*

⇝ Exercice.

On ne peut passer à l'inverse dans une inégalité que si les deux termes ont le même signe (et sont non nuls bien sûr). Dans tous les cas, cela change le sens de l'inégalité.

On a le droit d'additionner deux inégalités membre à membre si elles sont dans le même sens. On peut aussi les multiplier dans le cas où **TOUT EST POSITIF**. Par contre soustraire, multiplier quand tout n'est pas positif ou diviser des inégalités membre à membre n'est pas permis :

*Par exemple, pour* $a = -1$, $b = 1$, $c = -4$ *et* $d = 2$, *on a* $a \leqslant b$ *et* $c \leqslant d$ *alors que* $a - c = 3 \geqslant -1 = b - d$, $ac = 4 \geqslant 2 = bd$ *et* $\dfrac{c}{a} = 4 \geqslant 2 = \dfrac{d}{b}$.

**Proposition.** *Soient* $a$, $b$, $c$ *et* $d$ *des réels.*

- *Si* ($a < b$ *et* $b \leqslant c$) *ou* ($a \leqslant b$ *et* $b < c$), *alors* $a < c$.
- *Si* $a < b$ *et* $c \leqslant d$, *alors* $a + c < b + d$.
- *Si* $a < b$ *et* $0 < c$ (*respectivement* $c < 0$), *alors* $ac < bc$ (*respectivement* $ac > bc$). *En particulier,* $a < b$ *si et seulement si* $-a > -b$.
- $ab > 0$ *si et seulement si* ($a > 0$ *et* $b > 0$) *ou* ($a < 0$ *et* $b < 0$).
- $ab < 0$ *si et seulement si* ($a < 0$ *et* $b > 0$) *ou* ($a > 0$ *et* $b < 0$).
- *Si* $0 < a < b$ *et* $0 < c \leqslant d$, *alors* $ac < bd$.
- $a > 0$ (*respectivement* $a < 0$) *si et seulement si* $1/a > 0$ (*respectivement* $1/a < 0$).
- *Si* ($a > 0$ *et* $b > 0$) *ou* ($a < 0$ *et* $b < 0$), *alors* $a < b$ *si et seulement si* $1/a > 1/b$.

Moralité : lorsqu'on additionne membre à membre une inégalité large et une inégalité stricte, on obtient une inégalité stricte. Lorsqu'on multiplie membre à membre une inégalité large et une inégalité stricte, **et que tout est strictement positif**, on obtient une inégalité stricte (sauf si l'inégalité large est $0 \leqslant 0$ bien sûr).

$\rightsquigarrow$ EXERCICE.

Par récurrence, on montre que :

**Proposition.** *Soient* $x$ *et* $y$ *deux réels.*

- *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$.
  - *Si* $n$ *est pair et* $0 \leqslant x < y$, *alors* $x^n < y^n$.
  - *Si* $n$ *est pair et* $x < y \leqslant 0$, *alors* $x^n > y^n$.
  - *Si* $n$ *est impair et* $x < y$, *alors* $x^n < y^n$.
- *Soit* $n \in \mathbb{Z} \backslash \mathbb{N}$.
  - *Si* $n$ *est pair et* $0 < x < y$, *alors* $x^n > y^n$.
  - *Si* $n$ *est pair et* $x < y < 0$, *alors* $x^n < y^n$.
  - *Si* $n$ *est impair et* $0 < x < y$, *alors* $x^n > y^n$.
  - *Si* $n$ *est impair et* $x < y < 0$, *alors* $x^n > y^n$.

Moyen mnémotechnique : la règle dans le cas où $n = 1$ est la même pour tous les $n$ entiers naturels impairs. La règle dans le cas où $n = 2$ (fonction carré) est la même que pour tous les $n$ entiers naturels pairs. La règle dans le cas où $n = -1$ (fonction inverse) est la même que pour tous les $n$ entiers négatifs impairs. Ces résultats deviendront un réflexe une fois que nous aurons revu les fonctions du type $x \mapsto x^n$ et leur monotonie, cf. chapitre 6.

$\rightsquigarrow$ EXERCICE.

Élever à une puissance entière les termes d'une inégalité n'est pas permis s'ils sont de signe contraire (à part si la puissance en question est un entier naturel impair).

*Par exemple, on a* $-3 < 5$ *et* $(-3)^2 < 5^2$ *mais* $-4 < 2$ *et* $(-4)^2 > 2^2$.

**Corollaire.** *Soient* $x \in \mathbb{R}^*$ *et* $n \in \mathbb{Z}$.

- *Si* $n$ *est pair, alors* $x^n > 0$.
- *Si* $n$ *est impair, alors* $x^n$ *et* $x$ *ont le même signe.*

### b) Parties de $\mathbb{R}$ définies par une relation d'ordre

Pour tout réel $a$, l'intervalle $[a\,;a]$ est le singleton $\{a\}$. Les intervalles $]a\,;a]$, $[a\,;a[$ et $]a\,;a[$ sont vides.

**Définition (intervalles).** *Pour tous réels* $a$ *et* $b$ *tels que* $a \leqslant b$, *nous notons*

$[a\,;b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ (*intervalle fermé borné ou segment*),
$]a\,;b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$ *si* $a < b$ (*intervalle semi-ouvert borné*),
$[a\,;b[ = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$ *si* $a < b$ (*intervalle semi-ouvert borné*),
$]a\,;b[ = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ *si* $a < b$ (*intervalle ouvert borné*),
$]-\infty\,;a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant a\}$ (*intervalle fermé non borné*),
$]-\infty\,;a[ = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$ (*intervalle ouvert non borné*),
$[a\,;+\infty[ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant a\}$ (*intervalle fermé non borné*),
$]a\,;+\infty[ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$ (*intervalle ouvert non borné*),

$]-\infty\,;+\infty[\, = \mathbb{R}$ *(intervalle ouvert et fermé non borné).*

*Les réels $a$ et $b$ sont appelés les extrémités de l'intervalle.*

Une intersection d'intervalles est un intervalle mais pas une union en général. Nous verrons dans la prochaine partie une caractérisation des intervalles : ce sont les parties de $\mathbb{R}$ qui n'ont pas de « trous ».

**Remarque :** Si $a > b$, alors l'intervalle $[a\,;b]$ (respectivement $[a\,;b[$, $]a\,;b]$ et $]a\,;b[$) désigne souvent, par abus de notation, l'intervalle $[b\,;a]$ (respectivement $]b\,;a]$, $[b\,;a[$ et $]b\,;a[$). Mais attention, certains ouvrages prennent la convention que ces intervalles sont vides.

**Définition.** *On note*

- $\mathbb{R}_+ = [0\,;+\infty[$ *l'ensemble des réels positifs.*
- $\mathbb{R}_+^* = ]0\,;+\infty[$ *l'ensemble des réels strictement positifs.*
- $\mathbb{R}_- = ]-\infty\,;0]$ *l'ensemble des réels négatifs.*
- $\mathbb{R}_-^* = ]-\infty\,;0[$ *l'ensemble des réels strictement négatifs.*

Ne pas confondre les notations $[p\,;n]$ et $[\![p\,;n]\!]$. Ce dernier n'est PAS un intervalle.

**Définition.** *Si $p$ et $n$ sont deux entiers tels que $p \leqslant n$, alors on note $[\![p\,;n]\!] = \{p; p+1; \dots; n-1; n\}$ l'ensemble des entiers compris (au sens large) entre $p$ et $n$.*

### c) Valeur absolue d'un réel

Autrement dit, si un nombre est strictement négatif, pour obtenir sa valeur absolue, on met un moins devant.

**Définition.** *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit la valeur absolue de $x$, noté $|x|$, par*

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

***Exemples :*** $|-3| = 3$, $|-\pi| = \pi$, $|\sqrt{2}| = \sqrt{2}$.

En particulier, si $x \in \mathbb{R}$, $|x| = \max(x, -x)$. Ainsi, un moyen simple de montrer une inégalité du type $|\alpha| \leqslant A$ est de montrer que $\alpha \leqslant A$ et $-\alpha \leqslant A$.

**Remarque :** Pour tout réel $x$, on a

$$|-x| = |x|, \qquad \big||x|\big| = |x|, \qquad x^2 = |x|^2, \qquad x \leqslant |x| \qquad -x \leqslant |x|.$$

De plus, $|x| = 0$ si et seulement si $x = 0$.

Pour montrer les trois propositions suivantes, on distingue les cas selon que les réels $x$ ou $y$ qui interviennent sont positifs ou négatifs (cela fait quatre cas) :

Insistons lourdement sur ce point : lorsque $x = y$, on peut toujours passer au carré et dire que $x^2 = y^2$. Mais pour revenir en arrière, sans précision sur le signe, on peut uniquement conclure que $|x| = |y|$. Nous verrons plusieurs exemples dans le paragraphe III.2.

**Proposition.** *Soient $x$ et $y$ deux réels. Nous avons :*

*De plus*

**Proposition.** *Soient $x$ et $y$ deux réels. Nous avons :*

- $|x \times y| = |x| \times |y|$,
- *Si $y \neq 0$, alors* $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$.
- *Si $x \neq 0$ et $n \in \mathbb{Z}$, alors* $|x^n| = |x|^n$.

Il faut impérativement savoir jongler entre ces équivalences.

**Proposition.** *Soient $x \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$. Nous avons*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| • $\lvert x\rvert \leqslant a$ | $\iff$ | | $\iff$ | |
| • $\lvert x\rvert < a$ | $\iff$ | | $\iff$ | |
| • $\lvert x\rvert \geqslant a$ | $\iff$ | | $\iff$ | |
| • $\lvert x\rvert > a$ | $\iff$ | | $\iff$ | |

L'inégalité triangulaire est une égalité si et seulement si $xy = |xy|$ si et seulement si $x$ et $y$ ont le même signe.

**Proposition (inégalité triangulaire).** *Pour tous réels $x$ et $y$,*

$$|x+y| \leqslant |x| + |y|.$$

DÉMONSTRATION.

□

**Corollaire (inégalité triangulaire renversée).** *Pour tous réels $x$ et $y$,*

$$\big||x| - |y|\big| \leqslant |x-y|.$$

En d'autres termes, sous forme moins condensée : $|x| - |y| \leqslant |x-y|$ et $|y| - |x| \leqslant |x-y|$, les deux sont justes, tout dépend de laquelle on a besoin !

DÉMONSTRATION.

□

# II Parties majorées, parties minorées de $\mathbb{R}$

## 1) Majorants et minorants

**Définition.** *Soit $A$ une partie non vide de $\mathbb{R}$ et soit $x$ un réel.*

- *On dit que $x$ est un majorant de $A$ si, pour tout $a \in A$, $a \leqslant x$.*
  *Si $A$ admet un majorant, alors on dit qu'elle est majorée.*
- *On dit que $x$ est un minorant de $A$ si, pour tout $a \in A$, $a \geqslant x$.*
  *Si $A$ admet un minorant, alors on dit qu'elle est minorée.*
- *Si $A$ est minorée et majorée, alors on dit qu'elle est bornée.*

***Exemples :***

**Proposition.** *Une partie non vide $A$ de $\mathbb{R}$ est bornée si et seulement si il existe $x \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $a \in A$, $|a| \leqslant x$.*

DÉMONSTRATION.

□

## 2) Maximum et minimum

En d'autres termes, un maximum est un majorant qui appartient à l'ensemble. On parle également de plus grand élément. De même pour un minimum.

**Proposition.** *Soit $A$ une partie non vide de $\mathbb{R}$.*

- *On dit que le réel $x$ est un maximum de $A$ si $x \in A$ et, pour tout $a \in A$, $a \leqslant x$.*
  *Si $A$ admet un maximum $x$, alors il est unique et on l'appelle le maximum de $A$. Dans ce cas, on note $x = \max A$.*
- *On dit que le réel $x$ est un minimum de $A$ si $x \in A$ et, pour tout $a \in A$, $a \geqslant x$.*
  *Si $A$ admet un minimum $x$, alors il est unique et on l'appelle le minimum de $A$. Dans ce cas, on note $x = \min A$.*

Démonstration.

□

**Remarques :**

- Une partie finie de $\mathbb{R}$ admet toujours un minimum et un maximum.
- Si une partie de $\mathbb{R}$ admet un minimum (respectivement un maximum), elle est minorée (respectivement majorée). Par contraposée, si une partie de $\mathbb{R}$ est non minorée (respectivement non majorée), alors elle n'admet pas de minimum (respectivement de maximum).
- Si $x$ et $y$ sont des réels, alors $|x| = \max\{x; -x\}$,

$$\min\{x;y\} = \frac{x+y-|x-y|}{2} \qquad \text{et} \qquad \max\{x;y\} = \frac{x+y+|x-y|}{2}.$$

***Exemples :***

La preuve ci-contre que la partie $A$ n'admet pas de minimum est assez technique pour quelque chose qui semble évident. Maintenant qu'on a vu comment faire, on pourra conclure directement pour un intervalle de ce type. D'ailleurs pour tous les intervalles, on pourra directement « lire » s'il y a un maximum ou un minimum, cf. tableau du paragraphe suivant.

Pour la partie $E$, cela semble également évident puisque $0$ n'est pas « atteint » par les termes de la suite $(1/n)_{n\geqslant 1}$. Avec des arguments de limites (cf. chapitre 8), on pourra conclure plus directement.

Les assertions du théorème suivant sont admises (elles découlent de la construction de $\mathbb{N}$ et de $\mathbb{Z}$, qui sont hors-programme) et peuvent être considérées comme des axiomes.

Puisque $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, en particulier, toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ admet un maximum.

**Théorème.**

- *Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un minimum.*
- *Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{Z}$ admet un maximum.*
- *Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{Z}$ admet un minimum.*

## 3) Borne supérieure et borne inférieure

On voit bien dans les exemples précédents que la partie $A$ n'admet pas de minimum mais que le réel $7$ est le plus grand des minorants. De même le réel $4\pi$ n'est pas un maximum de $C$ et pourtant il est le plus petit des majorants. Cela nous pousse à introduire les notions de bornes supérieure et inférieure.

Pour les parties définies comme l'ensemble des termes d'une suite :

$$E = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\},$$

on pourra admettre temporairement que, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante (respectivement décroissante) et converge vers un réel $a$, alors $a$ est la borne supérieure (respectivement inférieure) de $E$ mais pas le maximum (respectivement le minimum). C'est le théorème de la limite monotone, cf. chapitre 8. Même résultat pour les parties définies comme l'ensemble des valeurs prises par une fonction strictement monotone.

**Définition.** *Soit $A$ une partie non vide de $\mathbb{R}$.*

- *Si $A$ est majorée et si l'ensemble des majorants de $A$ admet un minimum, alors celui-ci est appelé borne supérieure de $A$ et noté $\sup(A)$.*
- *Si $A$ est minorée et si l'ensemble des minorants de $A$ admet un maximum, alors celui-ci est appelé borne inférieure de $A$ et noté $\inf(A)$.*

***Exemples :***

**Proposition.** *Si une partie $A$ admet un maximum (respectivement un minimum) $a$, alors $a$ est la borne supérieure (respectivement inférieure) de $A$.*

En d'autres termes : un maximum est une borne supérieure, mais la réciproque est fausse !

DÉMONSTRATION.

□

Pour les différents types d'intervalles, on a le tableau (avec $a$ et $b$ des réels tels que $a < b$) :

| $A$ | $\inf A$ | $\min A$ | $\sup A$ | $\max A$ |
|---|---|---|---|---|
| $[a\,;b]$ | | | | |
| $[a\,;b[$ | | | | |
| $]a\,;b]$ | | | | |
| $]a\,;b[$ | | | | |
| $[a\,;+\infty[$ | | | | |
| $]a\,;+\infty[$ | | | | |
| $]-\infty\,;b]$ | | | | |
| $]-\infty\,;b[$ | | | | |
| $]-\infty\,;+\infty[$ | | | | |

Le théorème suivant est admis (il découle de la construction de $\mathbb{R}$ qui est hors-programme) et peut être considéré comme un axiome.

**Théorème (théorème de la borne supérieure).**
- *Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée admet une borne supérieure.*
- *Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée admet une borne inférieure.*

**Théorème (caractérisation de la borne supérieure).** *Soit $A$ une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$.*

$$M = \sup A \iff \begin{cases} \qquad\qquad\qquad & (M \text{ est un majorant de } A) \\ & \\ & (M \text{ est le plus petit des majorants de } A) \end{cases}$$

Démonstration.

$\square$

De façon analogue, on a :

**Théorème (caractérisation de la borne inférieure).** *Soit $A$ une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$.*

$$m = \inf A \iff \begin{cases} \qquad\qquad\qquad & (m \text{ est un minorant de } A) \\ & \\ & (m \text{ est le plus grand des minorants de } A) \end{cases}$$

Voici une conséquence admise de ce théorème (voir la remarque ci-dessus) :

**Théorème (caractérisation des intervalles).** *Une partie $I$ de $\mathbb{R}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ si et seulement si, pour tous réels $x$ et $y$ de $I$ tels que $x \leqslant y$, le segment $[x\,;y]$ est inclus dans $I$.*

Cette caractérisation nous dit qu'un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ est une partie de $\mathbb{R}$ caractérisée par le fait que, quels que soient les éléments $x$ et $y$ de $I$, tout nombre réel compris entre $x$ et $y$ est encore dans $I$. En d'autres termes, les intervalles sont les seules parties de $\mathbb{R}$ sans trou ». Par exemples, $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle : il a un « trou » en $0$ !

## 4) Partie entière d'un réel

**Proposition (partie entière d'un réel).** *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leqslant x < n+1$. L'entier $n$ est appelé la partie entière de $x$ et noté $\lfloor x \rfloor$.*

Il est important de bien comprendre à la fois que l'existence et l'unicité de $\lfloor x \rfloor$ sont assurées par les deux inégalités de la proposition. Si on a deux inégalités du type $m \leqslant x < m+1$ avec $m \in \mathbb{Z}$ alors on peut conclure directement que $m = \lfloor x \rfloor$. Voir le premier exemple ci-dessous.

***Exemples :*** $\lfloor 20,21 \rfloor = 20$, $\lfloor -3,2 \rfloor = -4$, $\lfloor 7/3 \rfloor = 2$, $\lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$.

Démonstration.
- *Existence.*
  - Si $x \in \mathbb{Z}$, alors on pose $\lfloor x \rfloor = x$.
  - Si $x$ est un réel positif qui n'est pas entier, alors $A = \{p \in \mathbb{N} \,|\, p \leqslant x\}$ est une partie majorée (par $x$) de $\mathbb{N}$. Elle contient $0$ donc elle est non vide. Elle admet donc un maximum $p$. Puisque $p \in A$, on a $p \leqslant x$. Puisque $p+1 \notin A$ (par définition du maximum), on a $p+1 > x$. On pose alors $\lfloor x \rfloor = p$.
  - Si $x$ est un réel négatif qui n'est pas entier, alors $-x$ est positif et donc il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n < -x < n+1$. Ainsi $-n-1 < x < -n$. On pose alors $\lfloor x \rfloor = -n-1$.
- *Unicité.*

***Exemples :***

- *Pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, alors $\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.*

Si $n \notin \mathbb{Z}$, c'est faux car $\lfloor x \rfloor + n \notin \mathbb{Z}$ tandis que $\lfloor x+n \rfloor \in \mathbb{Z}$.
Il est faux aussi que $\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$ (contre-exemple : $x = 0,8$ et $y = 1,9$).

- *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. A quelle condition sur $x \in \mathbb{R}$, a-t-on $\lfloor nx \rfloor = n\lfloor x \rfloor$ ?*

En général c'est faux ! Par exemple, si $n = 5$, alors $\dfrac{1}{5} = 0,2$ et donc cette égalité n'est vraie que pour tous les réels dont le premier chiffre après la virgule est $0$ ou $1$.

**Remarque :** Tout ce qu'il faut retenir sur la partie entière d'un réel $x \in \mathbb{R}$ est que :

-
-
-

# III Racines d'un réel positif

## 1) Racine $n^{\text{ième}}$ d'un réel positif

Si $n = 2$ et $x$ est un réel positif, alors on note simplement $\sqrt{x}$ la racine carrée de $x$. On pourrait aussi noter $\sqrt[1]{x} = x^{1/1}$ mais cela présente peu d'intérêt.

**Proposition.** *Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$. Pour tout réel positif $x$, il existe un unique réel positif $y$ tel que $y^n = x$. Ce réel est appelé racine $n^{\text{ième}}$ de $x$ et noté $x^{\frac{1}{n}}$ ou $\sqrt[n]{x}$.*

DÉMONSTRATION. Nous montrerons l'unicité (par un argument de monotonie) puis l'existence (par un argument de continuité) dans le chapitre 6. □

***Exemples :*** $\sqrt[3]{8} = 2$ *car* $2^3 = 8$, $\sqrt[6]{729} = 3$ *car* $3^6 = 729$, $\sqrt[5]{32} = 2$ *car* $2^5 = 32$, $\sqrt[3]{729} = 9$ *car* $9^3 = 729$.

**Remarques :**

- On a $(-2)^3 = -8$ donc on pourrait être tenté de noter $-8 = \sqrt[3]{-2}$. On ne le fait pas : **on ne prend JAMAIS la racine d'un nombre strictement négatif !**
- Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on a $\sqrt[n]{0} = 0$ et $\sqrt[n]{1} = 1$.
- Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 2.
  — Si $x$ est un réel positif, alors $(\sqrt[n]{x})^n = \sqrt[n]{x^n} = x$.
  — Si $x$ est un réel quelconque et si $n$ est pair, alors $x^n \geqslant 0$ et $\sqrt[n]{x^n} = |x|$.

Attention à ne pas confondre $\sqrt[3]{x} = x^{1/3}$ avec $\sqrt{x}^3 = x^{3/2}$ !

Ne pas confondre le fait que $\sqrt{x} \geqslant 0$ (c'est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}_+$) et le fait que $x$ doit appartenir à $\mathbb{R}_+$ pour pouvoir définir $\sqrt{x}$.

**Proposition.** *Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soient $x$ et $y$ deux réels positifs. Nous avons :*

1.

Avec l'autre notation :
1. $(xy)^{\frac{1}{n}} = x^{\frac{1}{n}} y^{\frac{1}{n}}$.
2. $\left(\frac{1}{y}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{y^{\frac{1}{n}}}$ et $\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{x^{\frac{1}{n}}}{y^{\frac{1}{n}}}$.
3. $(x^{\frac{1}{n}})^p = (x^p)^{\frac{1}{n}}$.
4. $\left(x^{\frac{1}{p}}\right)^{\frac{1}{n}} = x^{\frac{1}{np}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{p}}$

La notation $x^{\frac{1}{n}}$ est plus facile à utiliser que la notation $\sqrt[n]{x}$ car on peut remarquer que ces formules sont analogues à celles des puissances entières. Dans le chapitre 6, nous généraliserons encore davantage la notion de puissance.

*2.*

*3.*

*4.*

Démonstration. 1. D'après les propriétés sur les puissances, nous avons $xy = (\sqrt[n]{x})^n(\sqrt[n]{y})^n = (\sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y})^n$. Par unicité de la racine $n^{\text{ième}}$ du réel positif $xy$, nous obtenons que $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y}$.

2. Analogue au point précédent.
3. On a $\left((\sqrt[n]{x})^p\right)^n = (\sqrt[n]{x})^{pn} = (\sqrt[n]{x})^{np} = \left((\sqrt[n]{x})^n\right)^p = x^p = (\sqrt[n]{x^p})^n$. Par unicité de la racine $n^{\text{ième}}$ du réel positif $x^p$, nous obtenons que $(\sqrt[n]{x})^p = \sqrt[n]{x^p}$.
4. On a $\left(\sqrt[n]{\sqrt[p]{x}}\right)^{np} = \left(\left(\sqrt[n]{\sqrt[p]{x}}\right)^n\right)^p = \left(\sqrt[p]{x}\right)^p = x$. Par unicité de la racine $(np)^{\text{ième}}$ du réel positif $x$, nous obtenons que $\sqrt[n]{\sqrt[p]{x}} = \sqrt[np]{x}$. On montre de la même façon que $\sqrt[p]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[np]{x}$. □

**Remarque :** Un grand classique à connaître : si $x$ et $y$ sont des réels strictement positifs,

L'expression $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ s'appelle la quantité conjuguée de $\sqrt{x} - \sqrt{y}$.

## 2) Trinômes du second degré

Soient $a$, $b$, $c$ et $x$ des réels, avec $\underline{a \neq 0}$. Notons $\Delta = b^2 - 4ac$. On a

Il faut comprendre et savoir refaire cette manipulation algébrique. L'idée est de modifier le trinôme pour faire apparaître une identité remarquable (quitte à ajouter ou enlever un terme).

**Définition.** *Le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$ est appelé discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$. L'expression $a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$ est appelée forme canonique de $ax^2 + bx + c$.*

**Théorème (factorisation des trinômes du second degré).**

- *Si $\Delta = 0$, alors $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$ avec $x_0 = -\frac{b}{2a}$.*
- *Si $\Delta > 0$, alors $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ avec*

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Si $\Delta < 0$, on ne peut pas factoriser $ax^2 + bx + c$ comme produit de polynômes de degré 1... à moins d'utiliser des nombres complexes mais ils ne sont pas au programme de la filière ECG.

Démonstration.

Nous déduisons aussi de la démonstration précédente les deux théorèmes suivants :

Les solutions de $(E)$ sont appelées les racines de $(E)$.

**Théorème.** *Considérons l'équation* $(E)\ :\ ax^2+bx+c=0$, *d'inconnue* $x\in\mathbb{R}$.

- *Si* $\Delta=0$, *alors* $(E)$ *admet* $x_0$ *pour unique solution.*
- *Si* $\Delta>0$, *alors* $(E)$ *admet deux solutions :* $x_1$ *et* $x_2$.
- *Si* $\Delta<0$, *alors* $(E)$ *n'admet pas de solution.*

Il suffit de retenir que le trinôme a le signe de $a$ sauf « entre ses racines » éventuelles.

**Théorème.**

- *Si* $\Delta>0$ *alors, en notant* $x_1$ *la plus petit racine et* $x_2$ *la plus grande, pour tout* $x\in\mathbb{R}$, $ax^2+bx+c$ *a le signe (au sens strict) de*

$$\begin{cases} a & \text{si} \quad x\in\,]-\infty\,;x_1[\,\cup\,]x_2\,;+\infty[ \\ -a & \text{si} \quad x\in\,]x_1\,;x_2[ \end{cases}$$

- *Si* $\Delta<0$ *alors, pour tout* $x\in\mathbb{R}$, $ax^2+bx+c$ *a le signe (au sens strict) de* $a$.
- *Si* $\Delta=0$ *alors, pour tout* $x\in\mathbb{R}\backslash\{-\frac{b}{2a}\}$, $ax^2+bx+c$ *a le signe (au sens strict) de* $a$.

En particulier, si le trinôme est positif ou nul, alors $\Delta\leqslant 0$. Ceci sera utile dans la démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz en deuxième année.

***Exemples :***

- *Résoudre l'équation* $25x^2+40x+16=0$, *d'inconnue* $x\in\mathbb{R}$.

- *Résoudre l'inéquation* $-5x^2+7x\leqslant 2$, *d'inconnue* $x\in\mathbb{R}$.

- *Montrer que, pour tout* $x\in\mathbb{R}$, $13x^2-11x+19>0$.

- *Résoudre l'inéquation* $2x-7<\sqrt{4x-11}$ *d'inconnue* $x\in\mathbb{R}$.

On a envie de passer au carré pour faire disparaitre la racine. Bonne idée mais attention : on ne peut passer au carré dans une inégalité que si les deux termes ont le même signe (on change le sens de l'inégalité si tout est négatif). Ici $\sqrt{4x-11}$ est toujours positif, mais pas $2x-7$... On fait deux cas !

- *Résoudre l'inéquation* $x^6 + \dfrac{36}{x^2} > 13x^2$ *d'inconnue* $x \in \mathbb{R}$.

Pour justifier les équivalences ci-dessous (il le faut), on utilise simplement le fait que $a^2 \leqslant b^2 \Leftrightarrow |a| \leqslant |b|$, vu dans le paragraphe I.3.c. Mais la justification classique est de dire que la fonction carré est <u>strictement</u> croissante sur $\mathbb{R}_+$.

**Remarque :** Prenez dès à présent du recul sur les trinômes du second degré (c'est un classique de lycée) et de ne pas se jeter sur le calcul du discriminant de $ax^2+bx+c$ (avec $a \neq 0$)

- lorsque $b = 0$. En effet, dans ce cas :
  - ou bien $a$ et $c$ sont de signe contraire et $ax^2+bx+c = ax^2+c = 0$ si et seulement si $ax^2 = -c$ si et seulement si $x = \pm\sqrt{\dfrac{-c}{a}}$.
  - ou bien $a$ et $c$ ont le même signe et $ax^2+bx+c = ax^2+c \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- lorsque $c = 0$. En effet, dans ce cas, $ax^2+bx+c = ax^2+bx = x(ax+b) = 0$ si et seulement si $x = 0$ ou $x = \dfrac{-b}{a}$.

On rappelle que $a \neq 0$.