Chapitre 16

Intégration sur un segment

Dans ce chapitre, lorsque x et y sont réels, on adopte la convention que $[x\,;y]$ désigne le segment $[y\,;x]$ lorsque $y < x$.

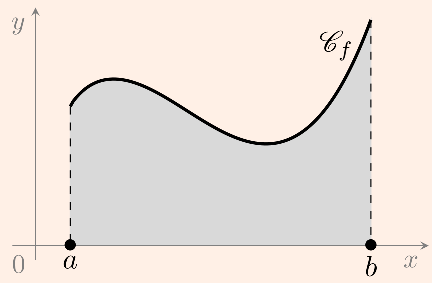
Dans ce chapitre a et b désignent des réels.

I Intégrale d'une fonction continue sur un segment

1) Intégrale d'une fonction continue positive

La fonction f s'appelle l'intégrande. Les réels a et b s'appellent les bornes (inférieure et supérieure respectivement) de l'intégrale.

Définition (intégrale d'une fonction continue positive). *Supposons que $a < b$. Soit f est une fonction continue et <u>positive</u> sur $[a\,;b]$. On appelle intégrale de f sur $[a\,;b]$ (ou de a à b), et on note $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$, l'aire de la surface délimitée par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ (colorée en gris sur la figure ci-contre).*



La variable t dans $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est muette. On peut la remplacer par n'importe quelle autre lettre qui n'est pas a et b (et pas f non plus bien sûr). Ainsi

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(x)\,dx$$

ou encore $\displaystyle\int_a^b f(u)\,du$ etc.

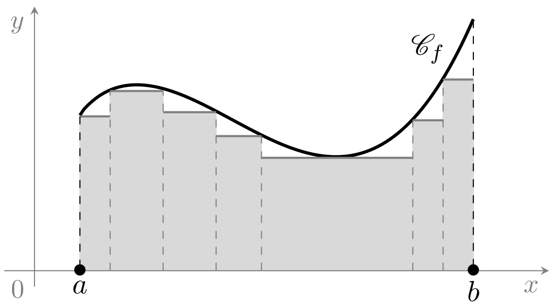
Exemples :

- *Si f est la fonction constante égale à $c \in \mathbb{R}_+^*$ sur $[a\,;b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est l'aire d'un rectangle de longueur c et de largeur $b-a$. Ainsi $\displaystyle\int_a^b c\,dt = c(b-a)$.*
- *Si $a = 0$, $b = 1$ et $f : t \longmapsto t$ sur $[0\,;1]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est l'aire d'un triangle rectangle de base 1 et de hauteur 1. Ainsi $\displaystyle\int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}$.*

La définition d'une intégrale en tant qu'aire de la surface sous la courbe est donc satisfaisante lorsque c'est celle d'une forme géométrique simple (comme un rectangle ou un triangle). Mais qu'en est-il si c'est l'aire sous la courbe de la fonction carré par exemple ? Ainsi, en général, cette définition en tant qu'aire n'est pas très rigoureuse mathématiquement. Et qu'est-ce que l'aire d'une surface au juste ? La construction rigoureuse de l'intégrale dite de Riemann est hors-programme. Elle consiste à approcher l'aire sous la courbe de f par la somme d'aires de rectangles (l'aire d'un rectangle étant facile à calculer) :

La difficulté technique est de montrer que, quelle que soit la façon dont on approche par des sommes d'aires de rectangles, la valeur limite est toujours la même (d'ailleurs c'est faux en général si la fonction n'est pas continue).

> *Reprenons l'exemple de la fonction f qui illustre la définition ci-dessus. On peut approcher l'aire sous la courbe de f par la somme d'aires de rectangles :*



On fait tendre la largeur de la base des rectangles vers 0 (et donc le nombre rectangles vers $+\infty$) et on définit l'intégrale de f comme étant la limite de la somme de leurs aires.

2) Intégrale d'une fonction continue

Si f est une fonction définie sur $[a\,;b]$, on définit la partie positive f^+ et la partie négative f^- de f : pour tout $x \in [a\,;b]$,

$$f^+(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & \text{si} & f(x) < 0 \\ f(x) & \text{si} & f(x) \geqslant 0 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad f^+(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & \text{si} & f(x) > 0 \\ -f(x) & \text{si} & f(x) \leqslant 0 \end{array} \right. .$$

Ce sont deux fonctions positives sur $[a\,;b]$.

On remarque que

$$\begin{aligned} f^+ &= \max\{0; f\} \\ &= \frac{|f| + f}{2}, \\ f^- &= -\min\{0; f\} \\ &= \frac{|f| - f}{2} \end{aligned}$$

donc, si f est continue, f^+ et f^- aussi.

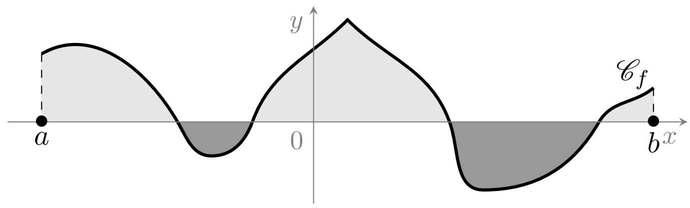
Définition (intégrale d'une fonction continue). *Supposons que $a < b$. Soit f est une fonction continue sur $[a\,;b]$. L'intégrale de f sur $[a\,;b]$ (ou de a à b) est définie par :*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f^+(t)\,dt - \int_a^b f^-(t)\,dt.$$

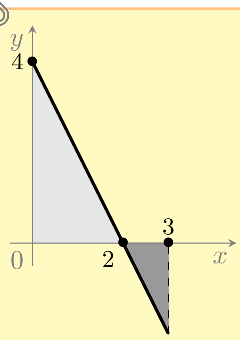
Autrement dit $\int_a^b f(t)\,dt$ est l'aire de la surface délimitée par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ en comptant négativement les aires des surfaces en dessous de l'axe des abscisses.

On parle d'aire algébrique, par opposition à l'aire géométrique.

Par exemple, si f est la fonction dont la courbe représentative est



alors $\int_a^b f(t)\,dt$ est la somme des aires des surfaces colorées en gris clair à laquelle on retranche la somme des aires des surfaces colorées en gris foncé.



Exemple : *Soit $f : t \in [0\,;3] \longmapsto 4 - 2t$.*

- *L'intégrale de f sur $[0\,;2]$ est l'aire d'un triangle rectangle de hauteur 4 et de largeur $2 - 0 = 2$, c'est-à-dire $\dfrac{4 \times 2}{2} = 4$.*
- *L'intégrale de f sur $[2\,;3]$ est l'opposé de l'aire d'un triangle rectangle de hauteur 2 et de largeur $3 - 2 = 1$, c'est-à-dire $\dfrac{2 \times 1}{2} = 1$.*

Ainsi $\int_0^1 (4 - 2t)\,dt = 4 - 1 = 3$.

On étend aussi la notion d'intégrale dans le cas où la borne inférieure est plus grande que la borne supérieure :

Définition. *Supposons que $a > b$. Soit f une fonction continue sur $[b\,;a]$. On pose*

$$\int_a^b f(t)\,dt = -\int_b^a f(t)\,dt.$$

Il reste à définir l'intégrale dans le cas où les deux bornes sont égales. Le choix s'impose de lui même : si $a = b$, l'aire algébrique de la surface délimitée par $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est nulle.

Autre argument : en prenant $a = b$ dans la définition précédente, on a $\int_a^a f(t)\,dt = -\int_a^a f(t)\,dt$ et donc $\int_a^b f(t)\,dt = 0$.

Définition. *Si f est définie en un point c, on pose $\int_c^c f(t)\,dt = 0$.*

3) Sommes de Riemann à pas constant

> Ce sont les seules qui sont au programme.

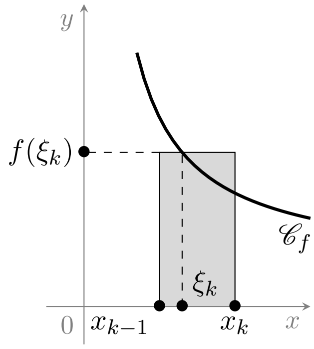
Parmi les sommes d'aires de rectangles qui approchent l'intégrale d'une fonction continue, on trouve les sommes de Riemann à pas constants.

Supposons que $a < b$. Soit f une fonction définie sur $[a\,;b]$. On découpe ce segment en n segments de même longueur :

$$[x_0\,;x_1]\,,\qquad [x_0\,;x_1]\,,\qquad \ldots\qquad [x_{n-1}\,;x_n]\,.$$

> Donc, pour tout $k \in [0\,;n]$,
>
> $$x_k = a + \frac{k(b-a)}{n}.$$
>
> Les réels $x_0, \ldots, x_n$ sont régulièrement espacés (avec un pas $\frac{b-a}{n}$). D'où le terme « pas constant ».

Pour tout $k \in [1\,;n]$, si $\xi_k \in [x_{k-1}\,;x_k]$, l'aire (algébrique) du rectangle de largeur $x_k - x_{k-1}$ et de longueur (algébrique) $f(\xi_k)$ est donc $(x_k - x_{k-1})f(\xi_k)$.



Définition. *On appelle somme de Riemann de f à pas constant toute somme du type*

$$S_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{c_k(b-a)}{n}\right),$$

avec $n \in \mathbb{N}^*$ et, pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, $c_k \in [k-1\,;k]$.

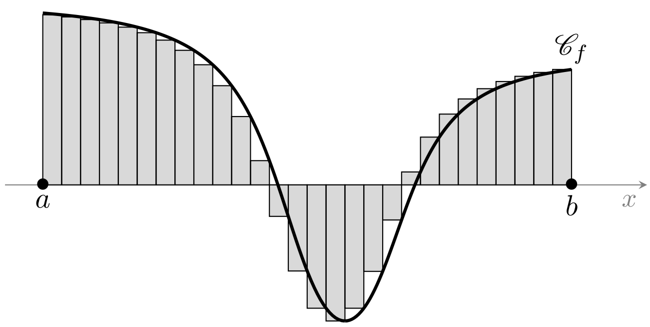
> $S_n(f)$ est alors la somme des aires de ces rectangles :
>
> $$\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})\,f(\xi_k)$$
>
> avec $\quad \xi_k = a + \dfrac{c_k(b-a)}{n}$
>
> pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$.

Les deux sommes de Riemann à pas constant que l'on rencontre le plus souvent correspondent respectivement aux choix $c_k = k$ et $c_k = k-1$ pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$:

Définition (sommes de Riemann à droite). *On appelle somme de Riemann de f à droite tout somme de la forme*

$$S_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right), \qquad n \in \mathbb{N}^*.$$

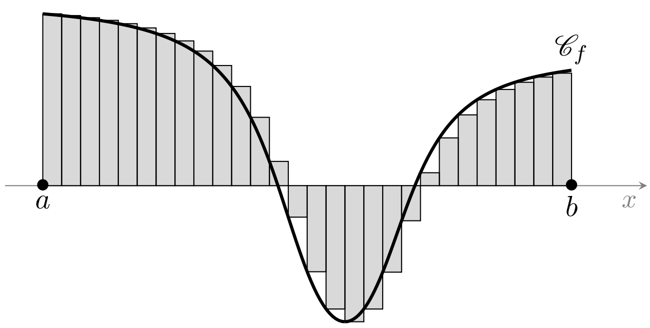
> Souvent $a = 0$ et $b = 1$, la somme prend alors la forme
>
> $$S_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$
>
> Dans l'exemple ci-contre, on a colorié en gris la somme de Riemann à droite $S_n(f)$ avec $n = 28$.



Définition (sommes de Riemann à gauche). *On appelle somme de Riemann de f à gauche tout somme de la forme*

$$S_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right), \qquad n \in \mathbb{N}^*.$$

> Souvent $a = 0$ et $b = 1$, la somme prend alors la forme
>
> $$S_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right).$$
>
> Dans l'exemple ci-contre, on a colorié en gris la somme de Riemann à gauche $S_n(f)$ avec $n = 28$.



Les sommes $S_n(f)$, $n \geqslant 1$, désignent ici les sommes de Riemann à droite, ou à gauche ou plus généralement à pas constants.

Théorème. *Soit f une fonction continue sur $[a\,;b]$. Avec les notations précédentes,*

$$S_n(f) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,dt.$$

DÉMONSTRATION. Admis dans le cas général.

Exemple :

II Primitives d'une fonction sur un intervalle

On parle d'une primitive sur I et non pas de la primitive sur I. Dans la proposition suivante, nous allons montrer que si une fonction admet une primitive, elle en admet une infinité.

Dans ce paragraphe et les suivants, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

1) Notion de primitive

Définition. *Soit f une fonction définie sur I et à valeurs réelles. On appelle primitive de f sur I toute fonction $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I de fonction dérivée $F' = f$.*

Exemples :

Il faut toujours préciser sur quel intervalle F est une primitive de f. Par exemple, il est faux de dire que $\ln$ est une primitive de la fonction inverse (ce n'est vrai que sur $I = \mathbb{R}_+^*$).

Remarques :

- Une primitive F d'une fonction f sur I est nécessairement continue puisqu'elle est dérivable par définition.
- En général une fonction quelconque n'admet pas de primitive.

  Par exemple la fonction partie entière n'admet de primitive sur l'intervalle $[0\,;2[$. En effet, raisonnons par l'absurde et supposons que ce soit le cas. Une primitive F sur $[0\,;2[$ est donc dérivable sur $[0\,;2[$ et, pour tout $x \in [0\,;2[$, $F'(x) = \lfloor x \rfloor$. En particulier F' est nulle sur $[0\,;1[$ donc F est constante sur $[0\,;1[$. Comme F est continue en 1, cette constante est égale à $F(1)$. On en déduit que la dérivée à gauche de F en 0 est nulle. C'est absurde puisque $F'(1) = 1$.

En fait le problème n'est pas tant la discontinuité mais plutôt le fait que la fonction partie entière ne vérifie pas la propriété des valeurs intermédiaires. Pour admette une primitive, une fonction doit être une dérivée. Or le théorème de Darboux (cf. exercice final du TD n° 15) assure qu'une dérivée vérifie forcément la propriété des valeurs intermédiaires.

Mais on verra dans le paragraphe suivant que toute fonction continue sur I admet une primitive sur I. C'est une condition suffisante mais pas nécessaire.

On a vu dans le chapitre précédent qu'il existe des fonctions dérivables qui ne sont pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Si f désigne une telle fonction, alors f' n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ mais admet f pour primitive.

Géométriquement, cela signifie que les graphes des différentes primitives d'une fonction sont obtenus les uns par rapport aux autres par translation verticale.

Proposition. *Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ admet une primitive sur I, alors elle en admet une infinité. De plus toutes les primitives de f sur I sont égales à une constante additive près, c'est-à-dire, G est une primitive de f sur I si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que*

$$\forall x \in I, \qquad G(x) = F(x) + \lambda.$$

Démonstration. Si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $G = F + \lambda$, alors G est dérivable sur I et $G' = F' = f$. Ainsi G est une primitive de F sur I. Réciproquement, supposons que G est une primitive de f sur I. La fonction $F - G$ est alors dérivable sur I et $(F - G)' = F' - G' = f - f = 0$. Par conséquent $F - G$ est une fonction constante.□

On dit alors que F est la primitive de f sur I prenant la valeur y_0 en x_0. Géométriquement, cela signifie que par un point du plan (d'abscisse appartenant à I mais d'ordonnée quelconque) passe le graphe d'une et d'une seule primitive de f.

Corollaire. *Soit f une fonction admettant une primitive sur I. Soient $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Il existe une unique primitive F de f sur I prenant la valeur y_0 en x_0.*

Démonstration. Si G est une primitive de f sur I, $F : x \longmapsto G(x) + y_0 - G(x_0)$ est une primitive de F qui prend la valeur y_0 en x_0. D'où l'existence. Si $\widetilde{F}$ est une autre primitive de f prenant la valeur y_0 en x_0, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\widetilde{F} = F + \lambda$. En évaluant en x_0, on obtient que $y_0 = y_0 + \lambda$ donc $\lambda = 0$ et donc $\widetilde{F} = F$. D'où l'unicité.□

2) Liens entre primitives et intégrales

Ce théorème est appelé le théorème fondamental de l'analyse.

Théorème. *Soit f une fonction continue sur I. Pour tout $a \in I$, la fonction*

$$x \in I \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt$$

est la primitive de f sur I qui s'annule en a.

Démonstration. Admis. □

On en déduit que :

Théorème. *Toute fonction continue sur I admet une primitive sur I.*

Théorème. *Soit f une fonction continue sur I. Si F est une primitive de f sur I alors*

$$\forall (a, b) \in I^2, \qquad \int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

On note aussi $\big[F(t)\big]_a^b = F(b) - F(a)$.

Exemples :

Le théorème fondamental de l'analyse motive l'étude des primitives puisqu'elles sont centrales dans le calcul des intégrales de fonctions continues. Voyons plus en détail comment trouver des primitives.

3) Primitives usuelles

Nous renvoyons à la page 118 du poly d'exercices pour le tableau des primitives des fonctions usuelles (que l'on obtient en en lisant le tableau des dérivées usuelles dans l'autre sens).

Exemples :

C'est une conséquence immédiate de la linéarité de la dérivation.

Proposition (linéarité). *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des réels. Si $f_1, \dots, f_n$ sont des fonctions admettant des primitives respectives $F_1, \dots, F_n$ sur I, alors $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k F_k$ est une primitive de $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k$ sur I.*

Exemples :

Lorsqu'une fonction est un produit, un quotient ou une composée de fonctions usuelles (et qu'elle est dérivable), on arrive toujours à calculer sa dérivée à l'aide des formules usuelles. Mais calculer une primitive d'une fonction est très difficile en général.

Pour trouver une primitive d'une fonction qui se présente sous la forme d'une somme ou d'une soustraction, on peut essayer de reconnaître qu'elle est la dérivée d'un produit ou d'un quotient.

Exemple :

Si elle se présente sous la forme d'un produit ou d'un quotient, on peut essayer de reconnaître qu'elle est la dérivée d'une composée, en s'aidant du tableau page 118 du poly d'exercices.

Exemples :

Nous verrons d'autres méthodes pour déterminer des primitives dans le paragraphe IV.

III Propriétés des intégrales

On dit que $\int$ est une somme continue et $\sum$ une somme discrète.

Nous allons voir que les propriétés de l'intégrale sur un segment sont très proches de celles des sommes finies.

Dans cette partie, on se donne f et g deux fonctions continues sur un intervalle I non vide et non réduit à un point. On note F et G des primitives sur I de f et g respectivement. On se donne aussi a et b dans I.

1) La relation de Chasles

On n'a pas forcément $a \leqslant c \leqslant b$.

Proposition (relation de Chasles). *Pour tout $c \in I$,*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt.$$

Démonstration. On a $F(b) - F(a) = F(b) - F(c) + F(c) - F(a)$. □

La relation de Chasles est notamment utile lorsque la fonction que l'on intègre possède des expression différentes sur le domaine d'intégration. C'est le cas dans cet exemple puisque l'expression de $|t-1|$ change selon le signe de $t-1$.

Exemple :

Par récurrence, nous en déduisons :

Une erreur très grave (mais hélas courante) aurait été de dire que, si $t \geqslant 1$, alors

$$\int_{-2}^3 |t-1|\,dt = \int_{-2}^3 (t-1)\,dt$$

et, si $t < 1$, alors

$$\int_{-2}^3 |t-1|\,dt = \int_{-2}^3 (1-t)\,dt$$

La variable t est muette et n'a rien à faire en dehors de l'intégrale.

Proposition (relation de Chasles généralisée). *Soit n est un entier supérieur ou égal à 3. Si $(a_1, \dots, a_n) \in I^n$, alors*

$$\int_{a_1}^{a_n} f(t)\,dt = \sum_{i=1}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)\,dt.$$

Exemple :

2) Linéarité de l'intégrale

Il est totalement faux que $\int_a^b f(t) \times g(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt \times \int_a^b g(t)\,dt$.

Proposition (linéarité). *Soit $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. Nous avons*

$$\int_a^b \big(\lambda f(t) + \mu g(t)\big)\,dt = \lambda \int_a^b f(t)\,dt + \mu \int_a^b g(t)\,dt.$$

Démonstration. On a déja vu que $\lambda F + \mu G$ est une primitive de $\lambda f + \mu g$. Ainsi

$$\begin{aligned}\int_a^b \big(\lambda f(t) + \mu g(t)\big)\,dt = \big[(\lambda F + \mu G)(t)\big]_a^b &= \lambda F(b) + \mu G(b) - \lambda\big(F(a) + \mu G(a)\big)\\ &= \lambda(F(b) - F(a)) + \mu(G(b) - G(a))\\ &= \lambda \int_a^b f(t)\,dt + \mu \int_a^b g(t)\,dt.\end{aligned}$$

□

Pour intervertir l'intégrale et la somme, il est impératif que la somme soit finie (sinon d'autres hypothèses sur la fonction f sont requises et cela fait de jolis problèmes de concours). On ne peut pas non plus intervertir deux intégrales.

Par récurrence, nous en déduisons :

Proposition (linéarité). *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $f_1,\dots,f_n$ des fonctions continues sur I et $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ des réels. Nous avons*

$$\forall (a,b) \in I^2, \qquad \int_a^b \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(t)\right) dt = \sum_{i=1}^n \lambda_i \int_a^b f_i(t)\,dt.$$

Exemple :

Nous terminerons cet exemple dans le paragraphe III.4.

3) Propriété de positivité

Si $a > b$, on ramène à une intégrale dont les bornes sont dans le bon ordre avec

$$\int_a^b f(t)\,dt = -\int_b^a f(t)\,dt.$$

Proposition (positivité). *Si $\underline{a < b}$ et si f est $\underline{\text{positive}}$ sur $[a\,;b]$, alors $\int_a^b f(t)\,dt \geqslant 0$.*

De plus $\int_a^b f(t)\,dt = 0$ si et seulement si f est nulle sur $[a\,;b]$.

Démonstration.

□

L'hypothèse de positivité est essentielle ici. En général, ce n'est pas parce que $\int_a^b f(t)\,dt = 0$ que f est nulle sur $[a\,;b]$. Par exemple $\int_{-1}^1 x\,dx = 0$.

Par contraposée, on obtient :

Proposition (stricte positivité). *Si $\underline{a<b}$ et f est positive sur $[a\,;b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt > 0$ si et seulement si il existe $x_0 \in [a\,;b]$ tel que $f(x_0) > 0$.*

De même, si $a < b$ et f est négative sur $[a\,;b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \leqslant 0$, avec égalité si et seulement si f est nulle sur $[a\,;b]$.

Corollaire. *Si $\underline{a<b}$ et si f est $\underline{\text{positive}}$ sur $[a\,;b]$, alors pour tous réels c et d tels que $a \leqslant c \leqslant d \leqslant b$, on a*

$$\int_c^d f(t)\,dt \leqslant \int_a^b f(t)\,dt.$$

Démonstration.

□

4) Propriété de croissance

On a le même résultat avec des inégalités strictes en utilisant la stricte positivité de l'intégrale.

Proposition (croissance de l'intégrale). *Supposons que $\underline{a<b}$ et que, pour tout $x \in [a\,;b]$, $f(x) \leqslant g(x)$. Alors*

$$\int_a^b f(t)\,dt \leqslant \int_a^b g(t)\,dt.$$

Démonstration. On applique la propriété de positivité avec la fonction $g - f$ continue et positive sur $[a\,;b]$, puis la linéarité. □

Proposition (inégalité triangulaire). *Si $\underline{a<b}$, alors $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,dt.$*

Démonstration. On applique la croissance de l'intégrale à l'inégalité $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$. □

On ne peut pas passer à la limite dans une intégrale. Des théorèmes le permettent sous certaines hypothèses mais aucun n'est au programme.

Exemple : *Reprenons l'exemple entamé à la fin du paragraphe III.2.*

$\mu = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est appelé la valeur moyenne de f. On a $\mu \in [m\,;M]$ et f est continue sur $[a\,;b]$ donc, d'après le TVI, il existe $x \in [m\,;M]$ tel que $f(x) = \mu$.

Remarque : Si $a < b$ et f est continue sur $[a\,;b]$, alors f est bornée sur $[a\,;b]$. En notant $m = \min\limits_{[a\,;b]} f$ et $M = \max\limits_{[a\,;b]} f$, on a $m \leqslant f \leqslant M$. Par propriété de croissance, on obtient l'inégalité dite « de la moyenne » :

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)\,dt \leqslant M(b-a).$$

IV Calcul d'intégrales

1) Intégration par parties

Les rôles de u et v sont interchangeables dans cette formule. L'idée est qu'on primitive une fonction et on dérive l'autre.

La formule d'intégration par parties est particulièrement efficace pour calculer une primitive ou une intégrale d'un produit de deux fonctions.

Théorème (formule d'intégration par parties – IPP). *Soient u et v deux fonctions de classe C^1 sur I. Soient $(a,b) \in I^2$. Alors*

Démonstration.

□

Souvent dans une IPP le choix s'impose : on primitive la fonction que l'on sait primitiver et on dérive l'autre. Dans cet exemple, on sait primitiver facilement les deux. Si on fait l'IPP dans l'autre sens, on obtient

$$\int_0^1 te^t\,dt = \frac{e}{2} - \int_0^1 \frac{t^2e^t}{2}\,dt$$

et on se ramène donc à une intégrale plus compliquée que celle initiale. En général on dérive les polynômes pour se ramener à une constante, en faisant éventuellement plusieurs IPP.

Exemples :

- *Calculons* $\displaystyle\int_0^1 t\,e^t\,dt$.

- *Calculons* $\displaystyle\int_0^1 t^2\,e^t\,dt$.

- *Cherchons une primitive de* Arctan *sur* $\mathbb{R}$ *(elle est bien continue sur* $\mathbb{R}$*).*

Dans cet exemple, on utilise une astuce classique : si f est de classe C^1 sur $[a\,;b]$, alors une IPP avec $u : t \mapsto t$ et $v = f$ donne

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b 1 \times f(t)\,dt = [tf(t)]_a^b - \int_a^b tf'(t)\,dt.$$

- *Calculons* $I = \int_0^{\pi} e^{-t}\cos(t)\,dt$.

Lorsqu'on fait deux IPP consécutives, à la deuxième on dérive (resp. intègre) toujours la fonction que l'on a dérivée (resp. intégrée) à la première… sinon on revient en arrière.

- *Cherchons une primitive de* $x \longmapsto \dfrac{1}{(1+x^2)^3}$ *sur* $\mathbb{R}$ *(elle est bien continue sur* $\mathbb{R}$*).*

  Fixons $x \in \mathbb{R}$*. Nous allons chercher une relation de récurrence sur la suite* $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *définie par*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad I_n = \int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^n}.$$

C'est une autre technique classique mais rassurez-vous : l'énoncé de concours vous aurait suggéré de la faire.

2) Changement de variable

Théorème (formule de changement de variable). *Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue sur I et à valeurs réelles. Soit φ une fonction de classe C^1 sur J telle que $\varphi(J) \subset I$. Pour tout $(\alpha, \beta) \in J^2$,*

On dit (et on écrit sur sa copie) que l'on effectue le changement de variable $x = \varphi(t)$ avec φ de classe C^1 sur $[\alpha\,;\beta]$. On a

« $dx = \varphi'(t)\,dt$ ».

Démonstration.

□

Remarques :

- Conformément au programme, les changements de variable non affines (c'est-à-dire de la forme $\varphi : x \longmapsto ax + b$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$) seront toujours indiqués. Dans tous les cas, on vérifiera bien sûr que φ est de classe C^1 sur $[\alpha\,;\beta]$.
- Parfois on reconnaît directement une intégrale d'une fonction écrite sous la forme $t \longmapsto f(\varphi(t))\varphi'(t)$. Dans ce cas la nouvelle variable s'exprime en fonction de l'ancienne. Mais cette situation n'est pas la plus courante.

  En général l'intégrale se présente sous la forme $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ et la fonction φ de changement de variable est indiquée (on fait le changement de variable $x = \varphi(t)$). On exprime alors toujours l'ancienne variable (x ici) en fonction de la nouvelle
  (t ici).
  Ensuite on écrit l'intégrale sous la forme $\displaystyle\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx$. C'est-à-dire que l'on cherche un antécédent α de a par φ et un antécédent β de b par φ.

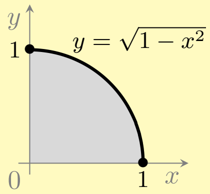
L'erreur classique est de considérer les images de a et b par φ au lien d'antécédents. Pour ne pas se tromper, on écrit « si t va de α à β, alors $x = \varphi(t)$ va de $\varphi(\alpha) = a$ à $\varphi(\beta) = b$ ».

Exemples :

- *Calculons* $\displaystyle\int_{-1}^{4} \frac{x}{\sqrt{3x+4}}\,dx$ *avec le changement de variable affine* $t = 3x+4$...

- *Calculons* $\displaystyle\int_{0}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$ *avec le changement de variable* $x = \sin(t)$.

C'était attendu : c'est l'aire d'un quart de disque de rayon 1.



- *Cherchons une primitive de* $t \longmapsto \dfrac{1}{e^t + e^{-t}}$ *sur* $\mathbb{R}$.

Il arrive que les changements de variable indiqués expriment la nouvelle variable en fonction de la nouvelle (par exemple $t = \varphi(x)$ au lieu du contraire). C'est une source d'erreur.

> *Par exemple considérons l'intégrale* $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$. *On pourrait être tenté d'effectuer le changement de variable* $t = x^2$ *(la fonction carré étant de classe* C^1*). On a « $dt = 2x\,dx$ ». On n'écrit surtout pas* $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\,dx = \int_0^1 e^{-t}\,\frac{dt}{2x}$ *mais plutôt* $\displaystyle\int_0^1 e^{-t}\,\frac{dt}{2\sqrt{t}}$. *Problème : la fonction que l'on intègre n'est pas continue sur* $[0\,;1]$. *C'est normal puisque le « vrai » changement de variable est* $x = \sqrt{t}$ *et la fonction racine carrée n'est de classe* C^1 *sur* $[0\,;1]$. *Il faudrait contourner ce problème autrement...*

Lorsqu'on fait un changement de variable, on n'écrit jamais d'intégrale présentant les deux variable à la fois.

Dans ce cas, on commence par dire que $x = \varphi^{-1}(t)$ pour exprimer l'ancienne variable en fonction de la nouvelle... si φ^{-1} a un sens bien sûr et est de classe C^1.

Mais, contrairement à une légende répandue, il n'est pas nécessaire que la fonction φ soit bijective (même si c'est plus pratique pour la recherche des antécédents). Le nouveau programme impose désormais que les changements de variable soient strictement monotones et donc bijectifs de $[\alpha\,;\beta]$ dans $[\varphi(\alpha)\,;\varphi(\beta)] = [a\,;b]$.

Corollaire (intégrales et parité). *Soient* $a > 0$ *et* f *une fonction continue sur* $[-a\,;a]$.

- *Si f est paire, alors* $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$.
- *Si f est impaire, alors* $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

DÉMONSTRATION. La relation de Chasles entraîne que

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx.$$

En faisant le changement de variable $x = -t$ ($t \longmapsto -t$ est de classe C^1 sur $[0, a]$) dans la première intégrale, nous obtenons

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = -\int_a^0 f(-x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(-x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx,$$

d'où le résultat selon que f soit paire ou impaire. □

V Étude de fonctions définies par une intégrale

Ce théorème n'est pas clairement au programme mais les intégrales dont les bornes varient sont très classiques. Elles définissent des fonctions que l'on peut étudier (cf. exemple ci-dessous). Il faut surtout retenir et savoir reproduire la démonstration de ce théorème.

Théorème. *Soit f une fonction continue sur I. Soient u et v des fonctions dérivables sur un intervalle J non vide et non réduit à un point et à valeurs dans I. La fonction*

$$G : x \in J \longmapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt$$

est alors dérivable sur J et

$$\forall x \in J, \qquad G'(x) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x))$$

DÉMONSTRATION.

□

L'étude d'un tel exemple sera systématiquement guidée. Néanmoins, pour la dérivabilité et le calcul de la dérivée, c'est à vous d'avoir le réflexe d'introduire des primitives, cf. théorème précédent).

Exemple : *Considérons* $g : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{e^{-t}}{t}\, dt$.

VI Retour sur les sommes de Riemann

1) Sommes de Riemann à gauche et droite dans le cas des fonctions monotones

Supposons que f est croissante sur $[a\,;b]$ (quitte à remplacer f par $-f$). Notons $(S_n(f))_{n\geqslant 1}$ et $(T_n(f))_{n\geqslant 1}$ les suites des sommes de Riemann de f à droite et à gauche respectivement.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tous $k \in [\![1\,;n]\!]$ et $t \in \left[\frac{k-1}{n}\,;\frac{k}{n}\right]$, on a

$$f\left(a+\frac{(k-1)(b-a)}{n}\right) \leqslant f\left(a+t(b-a)\right) \leqslant f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)$$

donc, par croissance de l'intégrale,

$$\frac{1}{n}f\left(a+\frac{(k-1)(b-a)}{n}\right) \leqslant \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k-1}{n}} f\left(a+t(b-a)\right)\,dt \leqslant \frac{1}{n}f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right).$$

On somme et on utilise la relation de Chasles :

$$\forall k \in [\![0\,;n-1]\!], \qquad T_n(f) \leqslant (b-a)\int_0^1 f\left(a+t(b-a)\right)\,dt \leqslant S_n(f).$$

Le changement de variable affine (donc de classe C^1) $t=\dfrac{x-a}{b-a}$ donne enfin :

$$T_n(f) \leqslant \int_a^b f\left(x\right)\,dx \leqslant S_n(f).$$

On en déduit que :

$$0 \leqslant \int_a^b f\left(x\right)\,dx - T_n(f) \leqslant S_n(f)-T_n(f)$$

et

$$0 \leqslant S_n(f) - \int_a^b f\left(x\right)\,dx \leqslant S_n(f)-T_n(f).$$

Or on remarque que

$$S_n(f)-T_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)-f\left(a+(k-1)\frac{b-a}{n}\right)\right).$$

On reconnait une somme télescopique : $S_n(f)-T_n(f)=\dfrac{b-a}{n}\left(f(b)-f(a)\right)$. Ainsi, par théorème d'encadrement,

$$S_n(f) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f\left(x\right)\,dx \qquad \text{et} \qquad T_n(f) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f\left(x\right)\,dx.$$

Remarque : Par ailleurs,

$$S_n(f)-T_n(f) \leqslant \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad n \geqslant \frac{(b-a)(f(b)-f(a))}{\varepsilon}.$$

Si, on choisit $n=\left\lfloor \dfrac{(b-a)(f(b)-f(a))}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$ et alors $S_n(f)$ et $T_n(f)$ sont des approximations de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ à ε-près respectivement par excès et par défaut.

2) Convergence dans le cas des fonctions de classe C^1

Par encadrement, on en déduit que $(S_n(f))_{n\geqslant 1}$ converge vers $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

Théorème. *Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit $f : [a\,;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur $[a\,;b]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ si, $S_n(f)$ est une somme de Riemann de f à pas constants, alors*

$$\left|S_n(f) - \int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \frac{(b-a)^2}{2n} \max_{[a\,;b]} |f'|.$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que

$$S_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{c_k(b-a)}{n}\right),$$

avec, pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, $c_k \in [k-1\,;k]$. On définit g sur $[0\,;1]$ par

$$\forall t \in [0\,;1] \qquad g(x) = (b-a)f\left(a + t(b-a)\right),$$

Cette égalité découle du changement de variables $x = a + t(b-a)$ avec $\varphi : t \longmapsto a + t(b-a)$ de classe C^1 sur $[0\,;1]$

de telle sorte que $S_n(f) = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{c_k}{n}\right)$ et $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_0^1 g(t)\,dt$. Ainsi

$$S_n(f) - \int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g\left(\frac{c_k}{n}\right) - \int_0^1 g(t)\,dt$$

$$=$$

$\square$

Exemple :

Remarque : On a

$$\frac{(b-a)^2}{2n}\max_{[a\,;b]}|f'|\leqslant\varepsilon \qquad\Longleftrightarrow\qquad n\geqslant\frac{(b-a)^2}{2\varepsilon}\max_{[a\,;b]}|f'|.$$

Si, on choisit $n=\left\lfloor\dfrac{(b-a)^2}{2\varepsilon}\max\limits_{[a\,;b]}|f'|\right\rfloor+1$ et alors $S_n(f)$ est une approximation de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ à ε-près.

3) La méthode des rectangles avec Python

La méthode des rectangle est une méthode qui consiste à approcher l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ d'une fonction continue sur un segment $[a\,;b]$ par une somme de Riemann. Plus précisément, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, posons

$$S_n(f)=\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\qquad\text{et}\qquad T_n(f)=\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right).$$

Supposons que a,b,n,f ont été implémentées en Python dans les variables `a,b,n,f`. D'après le théorème de convergence des sommes de Riemann, le script ci-dessous calcule une valeur approchée de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ (en utilisant la méthode des rectangles à droite) et la stocke dans la variable `S`.

Pour la somme des rectangles à gauche, on remplace de `k` par `k+1`.

```
S=0
for k in range(1,n+1):
    S=S+f(a+k*(b-a)/n)

S=S*(b-a)/n
```

ou plus simplement

```
S=np.sum([f(a+k*(b-a)/n) for k in range(1,n+1)])*(b-a)/n
```

Mais quelle valeur de n choisir ? On a vu dans les deux paragraphes précédents que :

- Si f est de classe C^1 sur un segment $[a\,;b]$ et si $n = \left\lfloor \dfrac{(b-a)^2}{2\varepsilon} \max\limits_{[a\,;b]} |f'| \right\rfloor + 1$, alors $S_n(f)$ et $T_n(f)$ sont des approximations de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ à ε près.
- Si f est croissante sur $[a\,;b]$ et si $n = \left\lfloor \dfrac{(b-a)(f(b)-f(a))}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$, alors $S_n(f)$ et $T_n(f)$ sont des approximations de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ à ε près, respectivement par excès et par défaut.
- Si f est croissante sur $[a\,;b]$ et si $n = \left\lfloor \dfrac{(b-a)(f(a)-f(b))}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$, alors $S_n(f)$ et $T_n(f)$ sont des approximations de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ à ε près, respectivement par défaut et par excès.

Exemple : *Considérons la fonction* $f : t \longmapsto \dfrac{4}{1+t^2}$.

On aurait aussi pu utiliser le fait que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Une étude de fonction montre que $f' : t \longmapsto \dfrac{-8t}{(1+t^2)^2}$ est borné par $|f(1/\sqrt{3})| = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. Ainsi, on prend

$$n = \left\lfloor \frac{(1-0)^2}{2\varepsilon}\frac{3\sqrt{3}}{2} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{3\sqrt{3}}{4\varepsilon} \right\rfloor + 1.$$

L'algorithme est donc plus rapide puisque $\dfrac{3\sqrt{3}}{4} \leqslant 2$.