Chapitre 15

Dérivation

On connaît déjà les dérivées mais, comme pour les limites et la continuité, le but de ce chapitre est de tout redémontrer (et de voir de nouveaux résultats). On part de zéro et on ne suppose rien d'acquis.

Dans ce chapitre, on se donne I un intervalle non vide et non réduit à un point.

I Dérivabilité

On se donne dans cette partie deux fonctions f et g de I dans $\mathbb{R}$.

1) Généralités

a) Premières définitions

Définition. *Soit $a \in I$. On appelle taux d'accroissement de f en a la fonction $\tau_a(f)$ (ou τ_a quand aucune confusion n'est possible) définie par :*

$$\tau_a : \begin{cases} I\backslash\{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{cases}$$

On dit que f est dérivable en a lorsque τ_a admet une limite finie en a . Cette limite est alors appelée le nombre dérivé de f en a et est notée $f'(a)$.

En d'autres termes, le nombre dérivé est, quand elle existe, la limite du taux d'accroissement.

Remarque : En posant $h = x - a \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$, on a la définition équivalente suivante : f est dérivable en a lorsque la fonction $h \longmapsto \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite finie quand h tend vers 0, et on a alors :$f'(a) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

En résumé, « f est dérivable sur I » = « f' est définie sur I » et « f est C^1 sur I » = « f' est continue sur I ». Une fonction C^1 est dérivable par définition. On verra dans le paragraphe I.3. que la réciproque est fausse. En termes ensemblistes,

$$C^1(I,\mathbb{R}) \subset D(I,\mathbb{R}).$$

Définition. *On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I. On appelle alors dérivée de f la fonction notée f' définie par :*

$$f' : \begin{cases} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ a & \longmapsto & f'(a) \end{cases}$$

Définition. *L'ensemble des fonctions dérivables sur I est noté $D(I,\mathbb{R})$.*

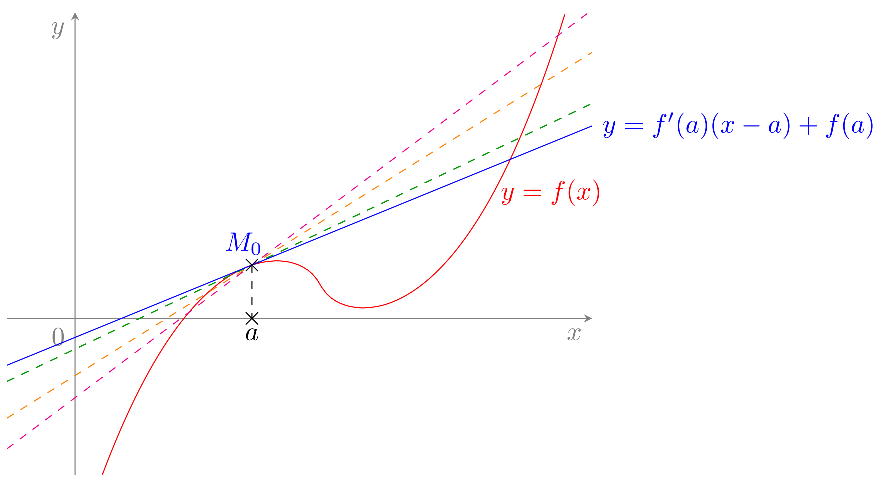
Exemples :

Si $x > 0$, la notation $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ n'est pas correcte car $\sqrt{x}$ est un réel, pas une fonction. On prendra l'habitude d'introduire une fonction f : « soit f la fonction $x \longmapsto \dots$ alors f est dérivable et pour tout $x \in I$, $f'(x) = \dots$ ».

On verra dans le paragraphe suivant (I.2.b) qu'une fonction dérivable est continue. On voit ci-contre que la réciproque est fausse : la valeur absolue et la racine carrée sont continues non dérivables en 0.

Interprétation physique/cinématique : Si $f(t)$ est la position à l'instant t, $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est la vitesse moyenne (éventuellement négative si on recule) entre x et a (le très célèbre « $v = d/t$ »). Au fur et à mesure que x se rapproche de a, on calcule la vitesse moyenne sur un laps de temps toujours plus court contenant a et donc on peut interpréter $f'(a)$ comme la vitesse instantanée à l'instant a (et c'est même comme cela qu'on la définit en physique).

Interprétation géométrique : On note A le point de coordonnées $(a, f(a))$ (c'est-à-dire le point d'abscisse a sur la courbe de f) et M le point d'abscisse x. Ainsi $\tau_a(x)$ est le coefficient directeur de la droite (AM). Si f est dérivable en a alors, quand x tend vers a, « M tend vers A » et la droite (AM) « tend vers une droite limite » (passant toujours par A) de coefficient directeur $f'(a)$.



Cette droite est appelée tangente à $\mathscr{C}_f$ en A ou au point d'abscisse a (ou en a par abus de langage). En d'autres termes :

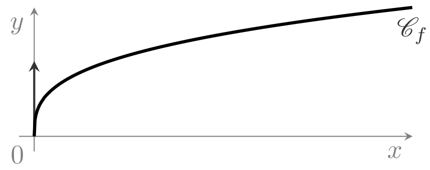
Définition. *Si f est dérivable en a, on appelle tangente à la courbe de f en a la droite passant par $A(a, f(a))$ de coefficient directeur $f'(a)$.*

Proposition. *Si f est dérivable en a, la tangente à $\mathscr{C}_f$ en a est la droite d'équation $y = f'(a) \times (x - a) + f(a)$*

Démonstration. Il suffit d'appliquer la définition. □

Si $\tau_a(x) \xrightarrow[x \to a]{} \pm\infty$, alors la droite (AM) « tend » aussi vers une une position limite, qu'on appelle aussi tangente à $\mathscr{C}_f$ en a, mais cette fois la droite est alors verticale.

Définition. *Si $\tau_a(x) \xrightarrow[x \to a]{} \pm\infty$, la droite d'équation $x = a$ est appelée tangente verticale à $\mathscr{C}_f$ en $A(a, f(a))$.*



En conclusion : Géométriquement, f est dérivable en a si et seulement si $\mathscr{C}_f$ admet en a une tangente non verticale.

b) Une condition nécessaire importante

La réciproque est fausse ! Une fonction peut être continue en un point mais non dérivable. Par exemple, la valeur absolue et la racine carrée sont continues mais non dérivables en 0. Il existe même des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ dérivables en aucun point !

Proposition. *Soit $a \in I$. Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.*

Démonstration.

□

c) Dérivabilité à droite et à gauche

Définition. *Soit $a \in I$. f est dérivable à droite (respectivement à gauche) en a si τ_a admet une limite à droite (respectivement à gauche) finie en a. On note alors cette limite $f'_d(a)$ (respectivement $f'_g(a)$).*

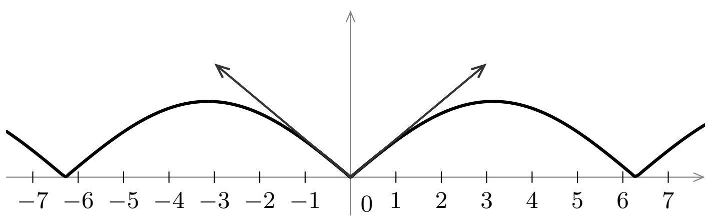
Exemple : *La valeur absolue est dérivable à droite et à gauche en 0, et si on la note f, alors $f'_d(0) = 1$ et $f'_g(0) = -1$.*

Proposition. *Si f est dérivable à droite à droite (respectivement à gauche) en a, alors f est continue à droite (respectivement à gauche) en a.*

On définit de manière analogue au I.1.a une fonction dérivable à droite ou à gauche sur I tout entier.

Démonstration. Analogue au paragraphe précédent. □

Remarque : Si f est dérivable à gauche (respectivement à droite) en a, on dit que $\mathscr{C}_f$ admet en a une demi tangente à gauche (respectivement à droite) en a, définie de manière analogue au a). Ci-dessous le graphe de $|\sin|$.



On retrouve le fait que la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0. De manière générale, si le graphe d'une fonction f présente un « pic » en a, alors f n'est pas dérivable en a.

Proposition. *Soit $a \in I$. f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche en a <u>et</u> $f'_g(a) = f'_d(a)$. On a alors $f'(a) = f'_g(a) = f'_d(a)$.*

Démonstration. cf. chapitre 13 : la fonction τ_a n'étant pas définie en a, elle admet une limite finie en a si et seulement si elle admet une limite finie à gauche et à droite et si celles-ci sont égales.

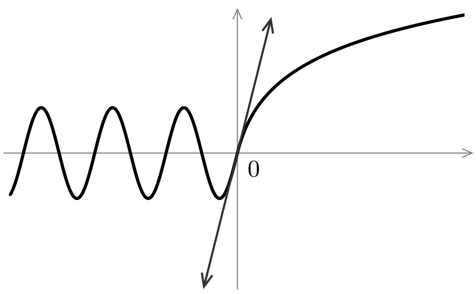
Application aux fonctions définies « par cas » : Soit

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} \ln(1+x) & \text{si } x \geqslant 0 \\ \sin(x) & \text{si } x < 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

On utilise dans cet exemple les expressions des dérivées des fonctions $\ln$ et $\sin$, qu'on démontrera dans la suite.

Morale de l'histoire : faites attention aux points de recollement.

Ci-dessous le graphe de f (non à l'échelle : la tangente en 0 est la première bissectrice !).



2) Opérations sur les fonctions dérivables en un point

a) Opérations algébriques

Tous ces résultats sont encore vrais si on remplace « dérivable » par « dérivable à gauche » ou « dérivable à droite ».

Théorème. *Soient f et g deux fonctions définies sur I et à valeurs réelles. Soient $a \in I$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On suppose que f et g sont dérivables en a. Alors*

1. *$f+g$ est dérivable en a et $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.*
2. *λf est dérivable en a et $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$.*
3. *fg est dérivable en a et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.*

Si de plus g ne s'annule pas sur I, alors

4. *$\dfrac{1}{g}$ est dérivable en a et $\left(\dfrac{1}{g}\right)'(a) = -\dfrac{g'(a)}{(g(a))^2}$.*
5. *$\dfrac{f}{g}$ est dérivable en a et $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$.*

Démonstration. Puisque f et g sont dérivables en a, on a

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=f'(a).$$

Par conséquent

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(a)}{x-a}=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}+\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\underset{x\to a}{\longrightarrow}f'(a)+g'(a),$$

$$\frac{(\lambda f)(x)-(\lambda f)(a)}{x-a}=\lambda\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\underset{x\to a}{\longrightarrow}\lambda f'(a),$$

$$\begin{aligned}\frac{(fg)(x)-(fg)(a)}{x-a}&=\frac{f(x)g(x)-f(a)g(x)+f(a)g(x)-f(a)g(a)}{x-a}\\&=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}g(x)+\frac{g(x)-g(a)}{x-a}f(a)\underset{x\to a}{\longrightarrow}f'(a)g(a)+g'(a)f(a),\end{aligned}$$

puisque g est continue en a. Nous en déduisons que $f+g$, λf et fg sont dérivables en a, avec les dérivées annoncées.

Supposons que g ne s'annule pas sur I. Nous avons

$$\frac{\left(\frac{1}{g}\right)(x)-\left(\frac{1}{g}\right)(a)}{x-a}=\frac{-1}{g(x)g(a)}\,\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\underset{x\to a}{\longrightarrow}\frac{-1}{(g(a))^2}g'(a).$$

Ainsi $\frac{1}{g}$ est dérivable en a avec dérivé annoncée. Enfin $\frac{f}{g}=f\times\frac{1}{g}$ est dérivable en a et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a)=f'(a)\left(\frac{1}{g}\right)(a)+f(a)\left(\frac{1}{g}\right)'(a)=\frac{f'(a)}{g(a)}+\frac{-g'(a)f(a)}{(g(a))^2}.$$

□

Remarque : Ces résultats se généralisent facilement à un nombre quelconque (fini) de fonctions dérivables (par récurrence) :

- Si $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n$ et $(f_1,\dots,f_n)$ sont dérivables alors $\lambda_1 f_1+\dots+\lambda_n f_n$ l'est aussi et

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k f_k\right)'=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k f_k'.$$

  On dit que la dérivation est linéaire.

- Si f,g,h sont trois fonctions dérivables alors fgh l'est et

  Plus généralement :

Inutile d'apprendre cette formule compliquée : on dérive les fonctions une à une et on somme.

Proposition. *Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $a\in I$. Soient $f_1,\dots,f_n$ des fonctions à valeurs réelles définies sur I et dérivable en a. Alors $f_1\cdots f_n$ est dérivable en a et*

$$(f_1\cdots f_n)'(a)=\sum_{k=1}^{n}f_1(a)\cdots f_{k-1}(a)f_k'(a)f_{k+1}(a)\cdots f_n(a).$$

En particulier, si $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$ est dérivable en a, alors la fonction f^n est dérivable en a et $(f^n)'(a)=nf'(a)(f(a))^{n-1}$.

$\rightsquigarrow$ Exercice.

b) Composition

De même qu'une composée de fonctions continues à droite n'est pas continue à droite, une composée de fonctions dérivables à droites n'est pas forcément dérivable à droite. En effet, si f décroît, alors f « transforme la droite en gauche ». Comme pour la continuité, une seule solution : le cas par cas, et le faire à la main.

Théorème. *Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $a \in I$. Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $f(I) \subset J$. Soit $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $f(a)$. Alors $g \circ f$ est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = f'(a)\, g'(f(a))$.*

Démonstration. La fonction $T_g : y \in J \longmapsto \begin{cases} \dfrac{g(y)-f(b)}{y-b} & \text{si} \quad y \in J\backslash\{b\} \\ g'(b) & \text{si} \quad y = b \end{cases}$ est continue en b puisque g est dérivable en $b = f(a)$ (il s'agit simplement du taux d'accroissement de g en b, prolongé par continuité en b). On a alors

$$\forall y \in J, \qquad g(y) - g(b) = T_g(y)\,(y-b).$$

En particulier

$$\forall x \in I, \qquad g(f(x)) - g(b) = T_g(f(x))(f(x) - f(a))$$

et donc

$$\forall x \in I\backslash\{a\}, \qquad \frac{g \circ f(x) - g \circ f(a)}{x-a} = \frac{g(f(x)) - g(b)}{x-a} = T_g(f(x))\,\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Puisque $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} f(a) = b$ et $T_g(y) \underset{y \to b}{\longrightarrow} g'(b) = g' \circ f(a)$, nous obtenons $T_g(f(x)) \underset{x \to a}{\longrightarrow} g' \circ f(a)$. Enfin f est dérivable en a donc $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \underset{x \to a}{\longrightarrow} f'(a)$. Par produit, on a donc

$$\frac{g \circ f(x) - g \circ f(a)}{x-a} \underset{x \to a}{\longrightarrow} g' \circ f(a) \times f'(a).$$

Ainsi $g \circ f$ est dérivable en a avec la dérivée annoncée. □

c) Dérivée d'une réciproque

Supposons que f est une bijection d'un intervalle I dans un intervalle J, que f^{-1} est dérivable en $b \in J$ et que f est dérivable en $f^{-1}(b) \in I$.

Et cela fournit aussi un moyen mnémotechnique pour retenir la condition $(f' \circ f^{-1})(b) \neq 0$ ainsi que la formule de la dérivée de f^{-1} en b.

Cela fournit donc une condition nécessaire de dérivabilité de f^{-1} en b. Réciproquement :

Théorème. *Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone sur I. Alors f réalise une bijection de I sur $J = f(I)$.*

Si $b \in J$ et si f est dérivable en $f^{-1}(b)$ avec $\qquad$, alors f^{-1} est dérivable en b et

Démonstration. Le fait que f réalise une bijection de I sur $J = f(I)$ découle du théorème de la bijection. Soit $b \in J$ et $a \in I$ tel que $b = f(a)$. Soit $y \in J\backslash\{b\}$. Il s'ensuit que $f^{-1}(y) \neq f^{-1}(b)$ et donc que

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y-b} = \left(\frac{y-b}{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}\right)^{-1} = \left(\frac{f(f^{-1}(y)) - f(a)}{f^{-1}(y) - a}\right)^{-1}.$$

Or $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$ et, comme f^{-1} est continue en b, nous avons $\lim\limits_{y \to b} f^{-1}(y) = f^{-1}(b) = a$. Par composition des limites, il vient que

Si f est dérivable et strictement monotone sur I et si $f'(a) = 0$, alors f^{-1} n'est pas dérivable en $f(a)$ (car sinon la remarque précédente entraine que $0 = f'(a) \times (f^{-1})'(f(a)) = 1$, ce qui est est absurde). Plus précisément, en reprenant la démonstration du théorème, on obtient

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(a))}{y - f(a)} \xrightarrow[y \to f(a)]{} +\infty$$

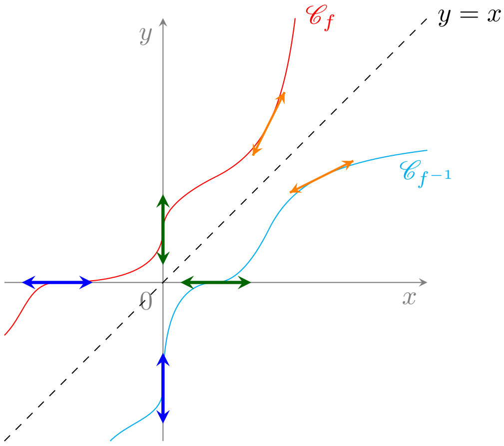
si f est strictement croissante (resp. $-\infty$ si f est strictement décroissante).

$$\lim_{x \to a} \frac{f(f^{-1}(y)) - f(a)}{f^{-1}(y) - a} = f'(a).$$

Puisque $f'(a) \neq 0$, nous en déduisons que

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} \xrightarrow[y \to b]{} (f'(a))^{-1} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

$\square$



Interprétation géométrique : Si f est dérivable et strictement monotone, alors la tangente à $\mathscr{C}_f$ en $a \in I$ et la tangente à $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ en $f(a)$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$. En particulier si $\mathscr{C}_f$ admet une demi-tangente horizontale (resp. verticale) en a, alors $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ admet une demi-tangente verticale (resp. horizontale en $f(a)$.

d) Et sinon ?

Tous les résultats de ce paragraphe donnent des conditions <u>suffisantes</u> pour qu'une fonction soit dérivable. <u>Aucun</u> ne donne de condition pour qu'une fonction ne soit pas dérivable. En d'autres termes, si f et g sont dérivables, on peut dire que $f + g$ et $f \times g$ sont dérivables, mais on ne peut rien affirmer si f et g ne sont pas dérivables. En effet, une somme ou un produit de fonctions non dérivables peut être dérivable : par exemple, si f est la valeur absolue, alors f n'est pas dérivable en 0 mais $f - f$ est la fonction nulle et $f \times f$ est la fonction carré, toutes deux dérivables en 0. Si aucun des théorèmes ne s'applique, on ne peut pas conclure que la fonction étudiée n'est pas dérivable. Une seule solution : le taux d'accroissement, c'est-à dire revenir à la définition d'une fonction dérivable.

Cependant, ce n'est pas parce que la valeur absolue n'est pas dérivable en 0 que f ne l'est pas. Aucun théorème ne nous permet de conclure quant à la dérivabilité (ou la non dérivabilité) de f en 0. Une seule solution : le taux d'accroissement.

Exemple : *Soit $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto |x|^3$.*

II Fonctions dérivées

Définition. *On dit qu'une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I. On appelle alors fonction dérivée de f, et on note f', la fonction qui à $x \in I$ associe $f'(x)$, la dérivée de f en x.*

On note $D^1(I, \mathbb{R})$ ou $D^1(I)$ l'ensemble des fonctions dérivables sur I.

Remarque : On a $D^1(I, \mathbb{R}) \subsetneq C^0(I, \mathbb{R})$.

On peut sans problème étendre la définition d'une fonction dérivable au cas d'une fonction définie sur un ensemble D, union d'intervalles non vides, non réduits à un point. En effet la dérivabilité est une notion locale.

⚠ Certains théorèmes exigent de considérer des fonctions dérivables sur des intervalles, comme celui faisant le lien entre monotonie et signe de la dérivée.

1) Opérations sur les fonctions dérivables sur I

Les résultats suivants découlent des théorèmes de la partie précédente.

Théorème. *Soient f et g dans $D^1(I,\mathbb{R})$. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors*

1. *$f+g$ est dérivable sur I et $(f+g)' = f' + g'$.*
2. *λf est dérivable sur I et $(\lambda f)' = \lambda f'$.*
3. *fg est dérivable sur I et $(fg)' = f'g + fg'$.*
4. *f^n est dérivable sur I et $(f^n)' = nf'f^{n-1}$.*

Si de plus g ne s'annule pas sur I, alors

4. *$\dfrac{1}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{1}{g}\right)' = -\dfrac{g'}{g^2}$.*
5. *$\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$.*

Théorème. *Soient $f \in D^1(I,\mathbb{R})$. Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $f(I) \subset J$. Soit $g \in D^1(J,\mathbb{R})$. Alors $g \circ f$ est dérivable sur I et $(g \circ f)' = f' \times g' \circ f$.*

Théorème. *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable et strictement monotone sur I. Si f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est dérivable sur $J = f(I)$ et $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$.*

2) Dérivées usuelles

Nous renvoyons au formulaire sur les dérivées usuelles pour un tableau récapitulatif.

a) Dérivabilité des fonctions puissances d'un nombre entier

Soit $n \in \mathbb{Z}$. Considérons la fonction $f_n : x \longmapsto x^n$.

b) Dérivabilité des fonctions exponentielle, logarithme népérien et puissances généralisées

Théorème.

1. *La fonction exponentielle est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et* $\exp' = \exp$.
2. *La fonction logarithme népérien est dérivable sur* $\mathbb{R}_+^*$ *et, pour tout* $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.
3. *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$. *La fonction* $p_\alpha : x \longmapsto x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}_+^*$ *et*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad p'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Si $\alpha > 0$, *alors on pose* $p_\alpha(0) = 0$. *Ainsi prolongée, la fonction* p_α *est dérivable en* 0 *si et seulement si* $\alpha \geqslant 1$.

Démonstration. Nous montrerons le point 1 dans le paragraphe V. Nous avons montré le point 3 dans le chapitre 6. □

Corollaire. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$ *et* $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1.$

c) Dérivabilité des fonctions trigonométriques

Commençons par un résultat limite préliminaire sur les fonctions trigonométriques.

Lemme. $\dfrac{\sin(u)}{u} \xrightarrow[u\to 0]{} 1.$

Démonstration. Soit $h \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$. Dans l'exercice 7 du TD n° 4, on a montré que $h\cos(h) \leqslant \sin(h) \leqslant h$. On a donc $\cos(h) \leqslant \dfrac{\sin(h)}{h} \leqslant 1$. Par parité, on obtient :

$$\forall h \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;0\right[\cap \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[, \qquad \cos(h) \leqslant \frac{\sin(h)}{h} \leqslant 1.$$

par continuité de cos en 0.

Comme $\cos(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 1$, par encadrement, on obtient $\dfrac{\sin(u)}{u} \xrightarrow[u\to 0]{} 1$. □

Théorème.

1. *La fonction sinus est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *avec* $\sin' = \cos$.
2. *La fonction cosinus est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *avec* $\cos' = -\sin$.
3. *La fonction tangente est dérivable sur chaque intervalle* $\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi\,;\frac{\pi}{2} + k\pi\right[$, $k \in \mathbb{Z}$, *et*

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}) \qquad \tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x).$$

On utilise la formule de trigonométrie

$$\sin(x) - \sin(y) = 2\cos(\frac{x+y}{2})\sin(\frac{x-y}{2}),$$

montrée dans l'exercice 1 du TD n° 5.

Démonstration. 1. Si $a \in \mathbb{R}$, alors

$$\frac{\sin(a+h) - \sin(a)}{h} = \frac{2}{h}\cos\left(a + \frac{h}{2}\right)\sin\left(\frac{h}{2}\right) \xrightarrow[h\to 0]{} \cos(a)$$

En effet, le lemme précédent nous assure que $\dfrac{2}{h}\sin\left(\dfrac{h}{2}\right) \xrightarrow[h\to 0]{} 1$ et la continuité de cos en a entraîne que $\cos\left(a + \dfrac{h}{2}\right) \xrightarrow[h\to 0]{} \cos(a)$.

On utilise la formule de trigonométrie

$$\cos(x) - \cos(y) = 2\sin(\frac{x+y}{2})\sin(\frac{y-x}{2}),$$

montrée dans l'exercice 1 du TD n° 5.

2. Si $a \in \mathbb{R}$, alors

$$\frac{\cos(a+h) - \cos(a)}{h} = -\frac{2}{h}\sin\left(a + \frac{h}{2}\right)\sin\left(\frac{h}{2}\right) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} -\sin(a)$$

En effet, le lemme précédent nous assure que $\frac{2}{h}\sin\left(\frac{h}{2}\right) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 1$ et la continuité de sin en a entraîne que $\sin\left(a + \frac{h}{2}\right) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \sin(a)$.

3. Soit $k \in \mathbb{Z}$. En tant que rapport d'une fonction dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi\,;\frac{\pi}{2} + k\pi\right[$ et d'une fonction dérivable qui ne s'annule pas sur $\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi\,;\frac{\pi}{2} + k\pi\right[$, la fonction tangente est bien dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi\,;\frac{\pi}{2} + k\pi\right[$. De plus, pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi\,;\frac{\pi}{2} + k\pi\right[$,

$$\begin{aligned}\tan'(x) &= \frac{\sin'(x)\cos(x) - \cos'(x)\sin(x)}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x).\end{aligned}$$

Théorème. *La fonction* Arctan *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et*

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \text{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Démonstration.

□

Corollaire.

- $\text{Arctan}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$.
- *Si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite qui converge vers* 0*, alors* $\text{Arctan}(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.
- *Si* u *est une fonction définie au voisinage d'un point* a *(éventuellement infini) et qui tend vers* 0 *en* a*, alors* $\text{Arctan}(u(t)) \underset{t\to a}{\sim} u(t)$.

Démonstration. On a donc

$$\frac{\text{Arctan}(x)}{x} = \frac{\text{Arctan}(x) - \text{Arctan}(0)}{x - 0} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \text{Arctan}'(0) = \frac{1}{1+0^2} = 1.$$

Ensuite on utilise le théorème de composition d'une suite ou d'une fonction. □

3) Fonctions de classe C^1

Définition. *On dit qu'une fonction* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *est de classe* C^1 *sur* I *si elle est dérivable sur* I *et si la fonction* f' *est continue sur* I.

On note $C^1(I, \mathbb{R})$ *ou* $C^1(I)$ *l'ensemble des fonctions de classe* C^1 *sur* I.

Proposition. *Les résultats du paragraphe II.1 (sur les opérations sur les dérivées) sont encore vrais si on remplace $D^1(I,\mathbb{R})$ par $C^1(I,\mathbb{R})$ et « dérivable sur I » par « de classe C^1 sur I ».*

$\rightsquigarrow$ Exercice.

Théorème. *Les fonctions polynomiales, rationnelles, exponentielles, logarithmes, puissances généralisées, sinus, cosinus, tangente et Arctangente sont de classe C^1 sur leur domaine de définition.*

Démonstration. Ces fonctions ont dérivables sur leur domaine de définition. De plus leurs dérivées respectives sont des fonctions continues sur leur domaine de définition. □

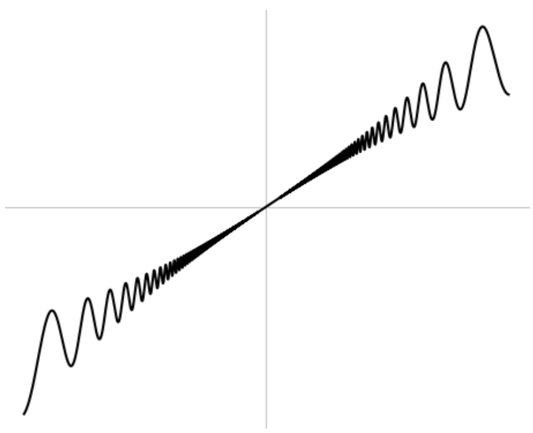
Cet exemple est classique : il faut savoir impérativement prolonger f par continuité et montrer que le prolongement est dérivable. Cependant, montrer que f n'est pas C^1 n'est pas facile et il y aurait des questions intermédiaires à l'écrit. Quoiqu'il en soit, même sans connaître ce contre-exemple, il faut impérativement savoir faire la différence entre une fonction dérivable et une fonction C^1, et savoir qu'une fonction dérivable n'est pas forcément de classe C^1.

⚠ On a $C^1(I,\mathbb{R}) \subsetneq D^1(I,\mathbb{R})$ mais la réciproque est fausse.

Exemple : *Soit*

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x + x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right) \end{array} \right.$$

Montrons que f est prolongeable en une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ mais non C^1.

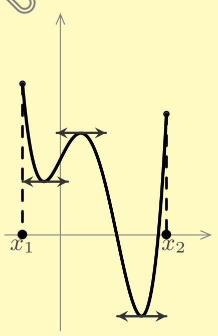


III Accroissements finis

1) Extremum local et dérivée

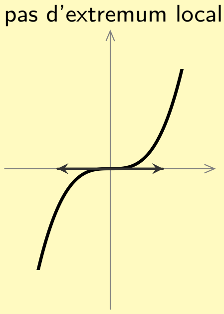
Définition (extremum local). *Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$. On dit que f admet un maximum (resp. un minimum) local en a si il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in I \cap]a-\alpha\,; a+\alpha[$, $f(x) \leqslant f(a)$ (resp. $f(x) \geqslant f(a)$). On dit que f admet un extremum local en a si f admet un maximum ou un minimum local en a.*

Proposition. *Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I et a un élément de I qui n'est pas une extrémité de I. Si f admet un extremum local en a alors $f'(a) = 0$.*



L'hypothèse que a n'est pas une extrémité est indispensable. En effet, le résultat ci-dessus est faux si a est une borne de I. Par exemple, sur le dessin ci-contre, f a bien une dérivée nulle en tous les extrema locaux intérieurs (géométriquement, cela se traduit par une tangente horizontale) mais f admet des extrema locaux en x_1 et en x_2 (et même un maximum global en x_1), et pourtant f' ne s'annule ni en x_1 ni en x_2 !

La réciproque est fausse ! Par exemple, si f est la fonction cube, alors $f'(0) = 0$ mais f n'admet pas d'extremum local en 0 !



Démonstration.

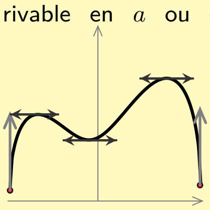
□

2) Théorème de Rolle

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

Théorème (théorème de Rolle).

f n'a pas besoin d'être dérivable en a ou en b :



Démonstration.

□

Interprétation graphique du théorème de Rolle : il existe un point c de la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f d'abscisse dans $]a\,;b[$ en lequel la tangente est horizontale.

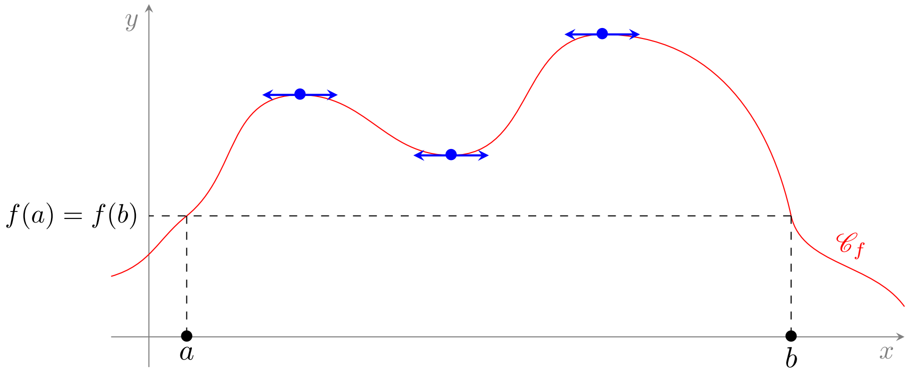
Il n'y a pas forcément unicité du point c.

⚠ Chacune des hypothèses du théorème est nécessaire :
• $f(a) = f(b)$. Un contre-exemple est la fonction $x \mapsto x$ sur $[0\,;1]$. • f est continue sur $[a\,;b]$, Un contre-exemple est la fonction définie sur $[0\,;1]$ par

$$x \mapsto \begin{cases} 1-x & \text{si } x \in]0\,;1] \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

• f dérivable sur $]a\,;b[$. Un contre-exemple est la fonction $f : x \in [-1\,;1] \longmapsto |x|$.

Dans l'exemple ci-dessous, il existe trois points d'abscisse dans $]a\,;b[$ en lesquels la tangente (en bleu) à $\mathscr{C}_f$ est horizontale.



3) Le théorème des accroissements finis

Théorème (théorème des accroissements finis).

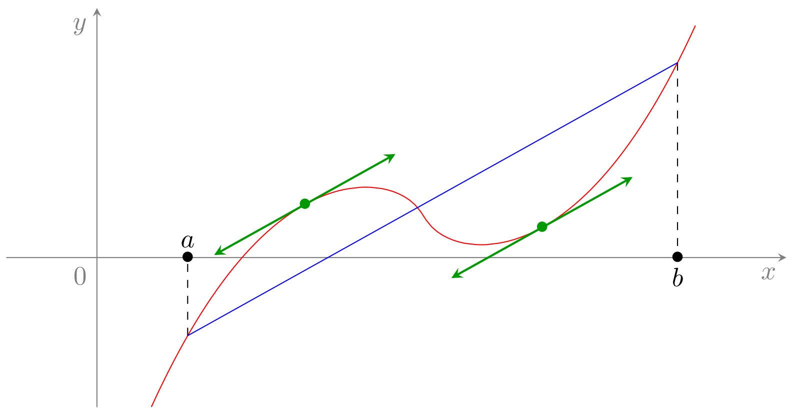
⚠ Il n'y a pas forcément unicité du point c.

Démonstration.

□

Interprétation graphique du théorème des accroissements finis : Notons $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$ les points de la courbes d'abscisses respectives a et b. Il existe un point c de la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f d'abscisse dans $]a\,;b[$ en lequel la tangente est parallèle à la droite (AB).

Dans l'exemple ci-dessous, il existe deux points d'abscisse dans $]a\,;b[$ en lesquels la tangente (en vert) à $\mathscr{C}_f$ est parallèle à la droite (AB) (en bleu).



4) L'inégalité des accroissements finis

On peut avoir $a = b$, mais attention, a doit être inférieur à b.

Théorème (IAF 1).

DÉMONSTRATION.

□

Interprétation cinématique : Si on roule entre 90 km/h et 130 km/h pendant 4h, alors on parcourt entre 360 et 520 km.

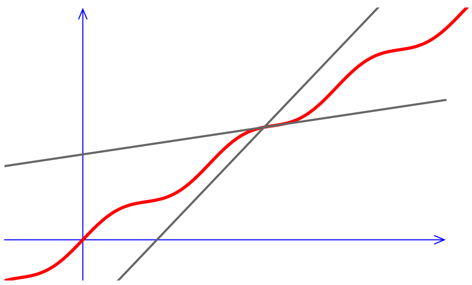
Remarque : En particulier, si $m \leqslant f'(x) \leqslant M$ sur un intervalle du type $[a\,;+\infty[$ alors, pour tout $x \geqslant a$, $m(x-a) \leqslant f(x) - f(a) \leqslant M(x-a)$ donc

$$m(x-a) + f(a) \leqslant f(x) \leqslant M(x-a) + f(a)$$

En d'autres termes, f est comprise entre les fonctions affines de pentes m et M qui coïncident avec f en a. Cela peut par exemple être pratique pour calculer des limites en $+\infty$ (par exemple si $m > 0$).

L'appellation d'IAF 1 et celle, plus bas, d'IAF 2 sont purement personnelles, nous les prenons par commodité pour pouvoir nous y référer, pour repérer laquelle nous utilisons. Cette distinction n'est pas dans le programme : toutes deux sont appelées « Inégalité des Accroissements Finis »

Interprétation géométrique : Le graphe de f est compris dans le « cylindre » formé par les droites de pentes m et M coupant $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a.

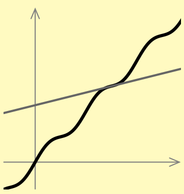


Remarque : Si on a seulement une des deux inégalités dans l'hypothèse, alors on a seulement l'inégalité correspondante dans la conclusion. Par exemple, si on a seulement $m \leqslant f'(x)$ dans les hypothèses, alors on a $m(b-a) \leqslant f(b) - f(a)$ dans la conclusion.

On aurait évidemment pu prendre n'importe quel réel α strictement positif à la place de $1/2$.

Exemple : *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable. On suppose que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) \geqslant 1/2$. Montrons que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.*

Cela se voit très bien : si la pente est plus raide que $1/2$, alors $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ et $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$ et il suffit d'utiliser le théorème de la bijection pour conclure.



Théorème (IAF 2).

On peut avoir $a \geqslant b$ ici.

Démonstration.

$\square$

Remarque : Les deux théorèmes précédents reposant entièrement sur le théorème des accroissements finis, ils sont encore valables en supposant uniquement f continue sur $[a\,;b]$, dérivable sur $]a\,;b[$ et en encadrant f (ou en majorant $|f'|$) sur $]a\,;b[$. En pratique, les énoncés donnés plus haut sont largement suffisants (d'ailleurs, ce sont les énoncés au programme).

Exemple :

5) Théorème de prolongement de la dérivée

Théorème (de prolongement de la dérivée).

Le nom du théorème est particulièrement mal choisi (il porte le nom plus adapté de « théorème de la limite de la dérivée » en MPSI par exemple) et est source de confusion, mais nous nous conformons au programme. Il ne faut surtout pas croire qu'on prolonge f' en posant $f'(a) = L$! Cela n'aurait aucun sens car $f'(a)$ a une définition bien précise (la limite du taux d'accroissement). Ce théorème **prouve** que f est dérivable en a et que $f'(a) = \ell$, ce qui n'est pas du tout la même chose.

DÉMONSTRATION.

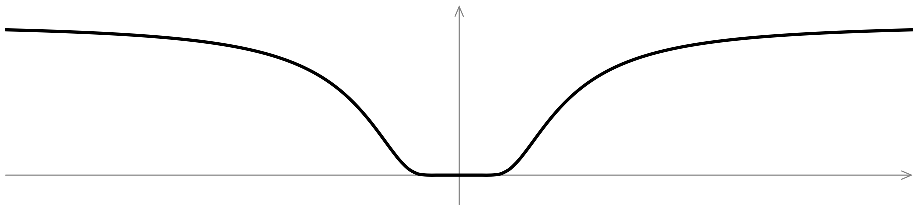
$\square$

Remarques :

- Si f' admet une limite infinie en a, alors f n'est pas dérivable en a (on le voit en reprenant la preuve ci-dessus en remplaçant ℓ par $+\infty$) mais sa courbe possède une tangente verticale au point d'abscisse a.
- ⚠ Si f' n'admet pas de limite en a, alors ON NE PEUT RIEN CONCLURE. En effet ce théorème est seulement une condition suffisante de dérivabilité en un point : si f' admet une limite finie en a, autrement dit si f' est prolongeable par continuité en a, alors f est dérivable en a. Cependant f peut être dérivable en a sans que f' y soit continue (cf. exemple du paragraphe II.3).

On reverra cette fonction dans le chapitre 22.

Exemple : *Considérons $g : x \in \mathbb{R}^* \longmapsto e^{-1/x^2}$. Montrons que f est prolongeable en une fonction C^1 sur $\mathbb{R}$.*



6) Applications à l'étude des suites récurrentes

Il est impératif de connaître la démarche suivante (conformément au programme, nous ne l'énonçons pas comme un théorème, il faudra à chaque fois refaire la démonstration dans le cadre d'un exercice, mais ce sera guidé bien sûr).

Soit f une fonction définie sur I et à valeurs réelles vérifiant :

- $f(I) \subset I$,
- f est dérivable sur I,
- f' est bornée par un réel $M > 0$ sur I (c'est par exemple le cas si f est de classe C^1 sur I et si I est un segment),
- f admet un point fixe ℓ sur I (*i.e.* $f(\ell) = \ell$).

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. On suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} \in I$. Puisque I est stable par f, on montre par récurrence que, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \in I$. Nous avons déjà vu que, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite finie, alors la continuité de f entraîne que cette limite est un point fixe de f. Jusqu'à présent, nous avons prouvé la convergence vers un point fixe de f à l'aide d'une étude poussée des suites (en utilisant notamment le théorème de la limite monotone).

Exemple : *Étudions la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $u_0 \in [0\,;2]$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}$.*

Dans le cas où $M \in]0\,;1[$, si $n_0 = 0$ et que u_0 suffisamment proche de ℓ, disons tel que $|u_0 - \ell| \leqslant 1$, alors

La fonction suivante prend en entrée f, M, u_0, ε et renvoie une approximation de x à ε près.

```

```

Remarque : Soit g soit une fonction dont on cherche l'unique valeur d'annulation a_0 sur I. Supposons que l'on ait trouvé une fonction f vérifiant les hypothèses de ce paragraphe telle que $g(x) = 0$ si et seulement si $f(x) = x$ pour tout $x \in I$. Trouver a_0 revient donc à trouver l'unique point fixe de f. Pour cela il suffit donc de considérer la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 \in I$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Sa limite est alors a_0.

Exemple : *On vérifie aisément que* $f : x \longmapsto \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{x}$ *est dérivable sur* $I = [1\,;2]$ *et que* $f([1\,;2]) \subset [1\,;2]$. *De plus elle* $\sqrt{2}$ *pour unique point fixe sur* $[1\,;2]$. *Pour tout* $x \in [1\,;2]$, *on a* $f'(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{x^2}$. *Comme* $\dfrac{1}{4} \leqslant \dfrac{1}{x^2} \leqslant 1$, *on obtient* $-\dfrac{1}{2} \leqslant f'(x) \leqslant \dfrac{1}{4}$. *Ainsi* f' *est bornée par* $M = \dfrac{1}{2}$ *sur* $[1\,;2]$. *Ainsi la fonction suivante prend en argument* ε *et renvoie une approximation de* $\sqrt{2}$ *à* ε *près :*

```python
def PointFixeSQRT2(eps):
    u=1
    n=int(np.log(eps)/np.log(1/2))+1
    for k in range(n):
        u=u/2+1/u
    return u
```

La commande `PointFixeSQRT2(0.0001)` *renvoie* 1.414213562373095.

IV Variations des fonctions dérivables

Rappelons que I est un **intervalle** de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

1) Le cas des fonctions monotones

Une fonction constante sur I est dérivable sur I et sa dérivée est la fonction nulle sur I. La réciproque est vraie :

Proposition. *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. Si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors f est une fonction constante.*

Le théorème précédent est faux si I n'est pas intervalle. Par exemple considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ qui vaut 1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et 0 sur $\mathbb{R}_-^*$. Elle sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, sa dérivée est la fonction nulle sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ et pourtant elle n'est pas constante sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Autre exemple : celui de la proposition suivante.

Démonstration.

□

Proposition (HP mais très classique).

- *Pour tout* $x > 0$, $\operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.
- *Pour tout* $x < 0$, $\operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$.

Démonstration.

Théorème. *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I.*

- *f est croissante sur I si et seulement si, pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$.*
- *f est décroissante sur I si et seulement si, pour tout $x \in I$, $f'(x) \leqslant 0$.*

Démonstration.

2) Le cas des fonctions strictement monotones

Proposition. *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I.*

- *Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$, alors f est strictement croissante sur I.*
- *Si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in I$, alors f est strictement décroissante sur I.*

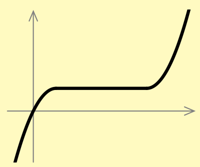
Démonstration. Le deuxième point se déduit du premier en remplaçant f par $-f$. Supposons que $f'(z) > 0$ pour tout $z \in I$. Soit $(x, y) \in I^2$ tel que $x < y$. Le théorème des accroissements finis appliqué à f dérivable sur $[x\,;y]$ assure qu'il existe $t \in]x\,;y[$ tel que

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(t) > 0.$$

Ainsi $f(y) > f(x)$. Nous en déduisons que f est strictement croissante. □

⚠ La réciproque est fausse. Par exemple la fonction $x \longmapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et pourtant sa dérivée s'annule en 0.

Ci-dessous le graphe d'une fonction croissante non strictement croissante.



Proposition. *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. La fonction f est strictement croissante (resp. décroissante) si et seulement si f' est positive (resp. négative) sur I et n'est identiquement nulle sur aucun intervalle non réduit à un point.*

Démonstration. Nous avons déjà montré l'équivalence entre la monotonie de f et le signe de f'.

- Si f n'est pas strictement monotone, alors il existe $(a, b) \in I^2$ tel que $a < b$ et $f(a) = f(b)$. Puisque f est monotone, nous en déduisons que f est constante sur $[a\,;b]$ et donc f' est nulle sur $[a\,;b]$. Par contraposée, nous obtenons que : si f n'est identiquement nulle sur aucun intervalle non réduit à un point, alors f est strictement monotone.
- Si f' est nulle sur $[a\,;b] \subset I$, alors f y est constante et n'est donc pas strictement monotone. Par contraposée, nous obtenons que : si f est strictement monotone, alors f n'est nulle sur aucun intervalle non réduit à un point. □

Corollaire. *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I et dérivable. Si $f' > 0$ (resp. $f' < 0$) sur I sauf éventuellement en un nombre fini de points de I, alors f est strictement croissante (resp. strictement décroissante).*

Exemple :

V Retour sur les fonctions exponentielle et logarithme

Nous avons (presque) tout en main désormais pour démontrer rigoureusement les résultats usuels sur les fonctions exponentielle et logarithme népérien.

1) La fonction exponentielle

Il existe de nombreuses façons de construire cette fonction, et nous en verrons une méthode dans le chapitre 24.

Théorème (existence de l'exponentielle). *Il existe une fonction à valeurs réelles, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ qui vaut 1 en 0 et qui coïncide avec sa dérivée sur $\mathbb{R}$. Cette fonction est appelée exponentielle et on la note $\exp$. On a donc :*

- $\exp(0) = 1$.
- $\exp$ *est dérivable (donc continue) sur* $\mathbb{R}$ *et* $\exp' = \exp$.

Corollaire. $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

Démonstration. Puisque $\exp$ est dérivable en 0, on a

$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{\exp(x) - \exp(0)}{x - 0} \xrightarrow[x \to 0]{} \exp'(0) = \exp(0) = 1.$$ □

Lemme. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x)\exp(-x) = 1$.*

Erreur classique à éviter : dire que la dérivée de la fonction $x \mapsto \exp(-x)$ est $x \mapsto \exp'(-x)$. Ne pas oublier de « sortir le -1 devant ».

Démonstration. Posons $g : x \longmapsto \exp(x)\exp(-x)$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \exp'(x)\exp(-x) + \exp(x)\left(-\exp'(-x)\right) \\ &= \exp(x)\exp(-x) - \exp(x)\exp(-x) = 0 \end{aligned}$$

Ainsi la fonction g est constante sur $\mathbb{R}$. Comme $g(0) = \exp(0)\exp(0) = 1$, on en déduit le résultat. □

Proposition. $\exp$ *est strictement positive et strictement croissante sur* $\mathbb{R}$.

Démonstration.

- On sait que $\exp$ prend une valeur strictement positive en 0. Raisonnons par l'absurde et supposons que $\exp$ n'est pas strictement positive : elle prend donc une valeur négative en un réel $t_0 \neq 0$. Comme f est continue, le TVI assure qu'elle prend la valeur intermédiaire 0 en un réel c_0. D'après le lemme précédent, on obtient alors $1 = \exp(c_0)\exp(-c_0) = 0$. C'est absurde. Ainsi $\exp$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$.
- La dérivée $\exp' = \exp$ est alors strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc $\exp$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. □

Proposition. *La fonction* $\exp$ *est unique, c'est-à-dire, si* f *est une fonction dérivable sur* $\mathbb{R}$ *telle que* $f' = f$ *et* $f(0) = 1$*, alors* $f = \exp$.

Démonstration. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$. Introduisons la fonction $h : x \longmapsto \dfrac{f(x)}{\exp(x)}$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$h'(x) = \frac{f'(x)\exp(x) - f(x)\exp'(x)}{(\exp(x))^2} = \frac{f(x)\exp(x) - f(x)\exp(x)}{(\exp(x))^2} = 0.$$

Ainsi la fonction h est constante sur $\mathbb{R}$. Comme $h(0) = \dfrac{f(0)}{\exp(0)} = 1$, on en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = 1$ et donc $f(x) = \exp(x)$. D'où l'unicité. $\square$

Proposition. $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

Démonstration.

- Soit $A > 0$. Notons $B = \ln(A+1) > 0$. Pour tout $x \geqslant B$, par stricte croissance de $\exp$ sur $\mathbb{R}$, $e^x \geqslant A + 1 \geqslant A$. Ainsi, par définition, $e^x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$.
- Soit $\varepsilon > 0$. Notons $B = \min(\ln(\varepsilon), -1) < 0$. Pour tout $x \leqslant B$, $x \leqslant \ln(\varepsilon)$ donc, par stricte croissance de $\exp$ sur $\mathbb{R}$, $|e^x - 0| = e^x \leqslant \varepsilon$. Ainsi, par définition, $e^x \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$. $\square$

Ces propriétés sont similaires à celles des puissances entières. C'est précisément pour cela que l'on note $\exp(x)$ sous la forme e^x.

Proposition. *Pour tous* $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ *et* $n \in \mathbb{Z}$,

$$e^{x+y} = e^x e^y, \qquad e^{-y} = \frac{1}{e^y}, \qquad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}, \qquad e^{nx} = (e^x)^n.$$

Démonstration.

- Fixons $y \in \mathbb{R}$ et posons $\psi_y : x \longmapsto \dfrac{\exp(x+y)}{\exp(y)}$. Il s'agit d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, vérifiant $\psi_y(0) = \dfrac{\exp(y)}{\exp(y)} = 1$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \psi_y'(x) = \frac{\exp'(x+y)}{\exp(y)} = \frac{\exp(x+y)}{\exp(y)} = \psi_y(x).$$

  Ainsi $\psi_y' = \psi_y$. Par unicité de la fonction exponentielle, il vient que $\psi_y = \exp$ et donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$.

Cf. lemme ci-dessus.

- Si $y \in \mathbb{R}$, $e^y e^{-y} = 1$. Comme $\exp$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, on obtient $e^{-y} = \dfrac{1}{e^y}$.
- Soient x et y des réels. On a $e^{x-y} = e^x e^{-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$.
- Fixons $x \in \mathbb{R}$.
  - — Procédons par récurrence. On a $e^{0 \times x} = e^0 = 1 = (e^x)^0$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $e^{nx} = (e^x)^n$. On a alors $e^{(n+1)x} = e^{nx}e^x = (e^x)^n e^x = (e^x)^{n+1}$. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e^{nx} = (e^x)^n$.
  - — Si $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, alors $-n \in \mathbb{N}$ et donc

$$e^{nx} = e^{(-n)(-x)} = (e^{-x})^{-n} = \left(\frac{1}{e^{-x}}\right)^n = (e^x)^n.$$

$\square$

Ici on utilise le premier point avec $y = nx$.

Ici on utilise le deuxième point avec $y = -x$.

2) La fonction logarithme népérien

Théorème. *Pour tout réel $x \in \mathbb{R}_+^*$, il existe un unique réel y tel que $e^y = x$. On le note $\ln(x)$. On a donc :*

- *Pour tous $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $y \in \mathbb{R}$, $e^x = y$ si et seulement si $x = \ln(y)$.*
- *Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $e^{\ln(x)} = x$.*
- *Pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\ln(e^y) = y$.*

Démonstration. La fonction $\exp$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Il s'agit donc d'une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$. Comme $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$, on en déduit que $f(\mathbb{R}) =]0\,;+\infty[$. La fonction $\ln$ est donc la réciproque de $\exp$. On en déduit les trois points. □

Proposition.

1. *$\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.*
2. *$\ln(1) = 0$, $\ln$ est strictement négative sur $]0\,;1[$ et strictement positive sur $]1\,;+\infty[$.*
3. *$\lim_{x\to0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.*
4. *$\ln$ est dérivable (donc continue) sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.*
5. *$\lim_{x\to1} \dfrac{\ln(x)}{x-1} = 1$.*
6. *Pour tous $x \in \mathbb{R}_+^*$, $y \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{Z}$, $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$,*

$$\ln\left(\frac{1}{y}\right) = -\ln(y), \qquad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y), \qquad \ln(x^n) = n\ln(x).$$

Démonstration.

1. Soient x et y deux réels strictement positifs. Si $\ln(x) \geqslant \ln(y)$ alors, par croissance de $\exp$ sur $\mathbb{R}$, on obtient $e^{\ln(x)} \geqslant e^{\ln(y)}$ et donc $x \geqslant y$. Par contraposée, si $x < y$, $\ln(x) < \ln(y)$. D'où la stricte croissance de $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. On a $e^0 = 1$ donc $\ln(1) = 0$. Puisque $\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit le signe de $\ln$.
3.
   - Soit $A > 0$. Notons $B = e^A > 0$. Pour tout $x \geqslant B$, par stricte croissance de $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$, $\ln(x) \geqslant \ln(B) = A$. Ainsi, par définition, $\ln(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.
   - Soit $A < 0$. Notons $\delta = e^A > 0$. Pour tout $x \in [0\,;\delta]$, $x \leqslant e^A$ donc, par stricte croissance de $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$, $\ln(x) \leqslant A$. Ainsi, par définition, $\ln(x) \xrightarrow[x\to0^+]{} -\infty$.
4. La continuité de $\ln$ est une conséquence du théorème de la bijection car $\exp$ est continue sur $\mathbb{R}$. Puisque $\exp'$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, on obtient que $\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad \ln'(x) = \frac{1}{\exp'(\ln(x))} = \frac{1}{\exp(\ln(x))} = \frac{1}{x}.$$
5. Puisque $\ln$ est dérivable en 1, on a
$$\frac{\ln(x)}{x-1} = \frac{\ln(x) - \ln(1)}{x-1} \xrightarrow[x\to1]{} \ln'(1) = \frac{1}{1} = 1.$$
6. On a
$$\exp\big(\ln(xy) - \ln(x) - \ln(y)\big) = \frac{\exp\big(\ln(xy)\big)}{\exp\big(\ln(x)\big)\exp\big(\ln(y)\big)} = \frac{xy}{xy} = 1,$$

En d'autres termes :
$$\frac{\ln(1+u)}{u} \xrightarrow[u\to0]{} 1$$

Le principe de preuve est le même : on passe tout d'un côté, on passe à l'exponentielle et on trouve 1.

donc $\ln(xy) - \ln(x) - \ln(y) = \ln(1) = 0$ et donc $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$. Ensuite

$$\exp\left(\ln\left(\frac{1}{y}\right) + \ln(y)\right) = \exp\left(\ln\left(\frac{1}{y}\right)\right)\exp\left(\ln(y)\right) = \frac{1}{y}y = 1$$

donc $\ln\left(\frac{1}{y}\right) + \ln(y) = \ln(1) = 0$. Ensuite

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) + \ln\left(\frac{1}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$$

Enfin $\exp(\ln(x^n) - n\ln(x)) = \dfrac{\exp(\ln(x^n))}{\exp(n\ln(x))} = \dfrac{x^n}{\exp(\ln(x))^n} = \dfrac{x^n}{x^n} = 1$ donc $\ln(x^n) - n\ln(x) = \ln(1) = 0$. $\square$