Chapitre 14

Grands théorèmes de continuité

Dans ce chapitre, on se donne un intervalle I non vide et non réduit à un point.

I Le théorème des valeurs intermédiaires

1) Première version du TVI

Théorème (des valeurs intermédiaires (TVI)). *Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f continue sur $[a\,;b]$. Soit $m \in [f(a)\,;f(b)]$. Alors il existe $c \in [a\,;b]$ tel que $f(c) = m$.*

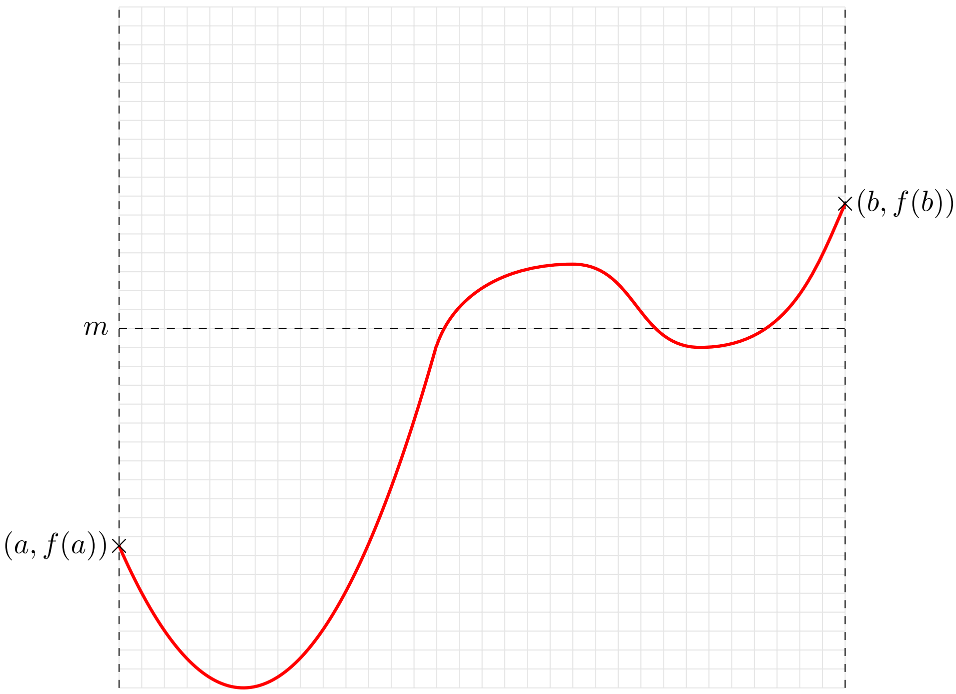
On n'a pas forcément $f(a) \leqslant f(b)$. La notation $m \in [f(a)\,;f(b)]$ est à prendre au sens de : « m est compris au sens large entre $f(a)$ et $f(b)$ ». Cela évite de faire plusieurs cas. Cependant, si on sait que $f(a) > f(b)$, on écrira naturellement $[f(b)\,;f(a)]$ (cf. I.4.c).

DÉMONSTRATION. Si $f(a) = f(b)$, alors $c = a$ convient. Supposons à présent $f(a) < f(b)$ (le cas $f(a) > f(b)$, il suffit de considérer $-f$ au lieu de f). se traite de façon tout à fait analogue : on précise ci-contre les changements à effectuer).

Nous allons pour cela utiliser l'algorithme de dichotomie. Le principe est très simple : à chaque étape, on dispose d'un intervalle qu'on coupe en deux (d'où le nom dichotomie, qui signifie : couper en deux) et on garde l'un des deux intervalles, que l'on notera $[a_n\,;b_n]$, sur lequel il y a une solution (ou, ici, puisque l'on cherche à prouver l'existence d'une solution, on garde un intervalle sur lequel les conditions du théorème, $f(a_n) \leqslant m \leqslant f(b_n)$, sont vérifiées). Voir le dessin ci-dessous.

L'algorithme de dichotomie est un grand classique des concours. Il est impératif de bien en comprendre le principe, cf. partie III.

Si $f(a) > f(b)$, au lieu de remplacer f par $-f$, on peut simplement modifier les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$: on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$ si $f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) \leqslant m$ et on pose $a_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$ si $f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) > m$. Le reste de la preuve est analogue, si ce n'est que $f(a_n) \geqslant m \geqslant f(b_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.



$\square$

Contrairement à une croyance très (trop) répandue, aucune autre hypothèse que ce soit (et certainement pas de la monotonie) n'est nécessaire pour appliquer le TVI : seule importe la continuité. En clair, le TVI c'est : « à un moment c'est plus grand, à un moment c'est plus petit, c'est continu, alors ça coupe ».

Le TVI prouve que, si la fonction est continue, elle prend toutes les valeurs intermédiaires entre $f(a)$ et $f(b)$, mais on ne peut rien affirmer au sujet des valeurs qui ne sont pas comprises entre $f(a)$ et $f(b)$, et certainement pas qu'elles ne sont pas atteintes ! Si $f(a) \geqslant m$ et $f(b) \geqslant m$, on ne peut rien conclure, et surtout pas qu'il n'existe pas de $c \in [a\,;b]$ tel que $f(c) = m$! Par exemple, $\cos(0) = \cos(2\pi) = 1$, mais qui irait sérieusement dire que $\cos$ ne s'annule pas sur $[0\,;2\pi]$ d'après le TVI ?

2) Implémentation en Python

Soient a, b et m des réels tels que $a < b$ et f une fonction continue sur $[a\,;b]$ telle que m est compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Le TVI nous garantit l'existence de $c \in [a\,;b]$ tel que $f(c) = m$.

L'algorithme de dichotomie vu dans la démonstration du TVI permet de construire deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ adjacentes qui convergent vers un réel c de $[a\,;b]$ vérifiant $f(c) = 0$. Elle vérifient notamment $a_n \leqslant c \leqslant b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. A $\varepsilon > 0$ fixé, il suffit donc d'itérer l'algorithme jusqu'à ce que le rang n soit tel que $b_n - a_n \leqslant \varepsilon$. On a aura alors

$$0 \leqslant c - a_n \leqslant b_n - a_n \leqslant \varepsilon \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant b_n - c \leqslant b_n - a_n \leqslant \varepsilon,$$

i.e. a_n et b_n sont des approximations à ε près du point c recherché.

On dit que a_n est une approximation de c par défaut et b_n une approximation de c par excès.

Quitte à remplacer f par $f - m$, on peut supposer que $m = 0$. L'intérêt : si on ne sait pas si $f(a) < f(b)$ ou $f(a) > f(b)$, il suffit, à chaque étape n de l'algorithme de savoir si la fonction a changé de signe entre a_n et $c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$ (c'est le cas si et seulement si $f(a_n) \times f(c_n) < 0$). Auquel cas on garde l'intervalle à gauche : (a_{n+1}, b_{n+1}) devient (a_n, c_n). Sinon on garde l'intervalle à gauche : (a_{n+1}, b_{n+1}) devient (c_n, b_n).

La fonction Python suivante prend en entrée f, a, b, ε (f étant une fonction continue sur $[a\,;b]$ telle 0 est compris entre $f(a)$ et $f(b)$) et renvoie une approximation d'un point en lequel f s'annule à ε près.

Elle renvoie l'approximation donnée par b_n mais on aurait pu prendre celle donnée par a_n à la place.

```python
def dichotomie(f,a,b,eps):
    while b-a>eps:
          c=(a+b)/2
          if f(a)*f(c)<0:#Si f change de signe entre a et c
              b=c#Alors f s'annule entre a et c
          else:
              a=c#Sinon f s'annule entre c et b
    return b
```

Si on veut construire un algorithme permettant de trouver une valeur approchée d'un point fixe de f (dont on a montré l'existence, voire l'unicité, au préalable), on remplace f par $g : x \longmapsto f(x) - x$ dans l'algorithme précédent.

Exemple : *La fonction $f : x \longmapsto x^2 - 2$ est continue sur $[1\,;2]$ et $f(1) < 0 < f(2)$. Puisqu'elle est strictement croissante sur $[1\,;2]$, le corollaire du TVI nous garantit même qu'elle s'annule un unique réel de $[1\,;2]$ (il s'agit de $\sqrt{2}$). Le script suivant*

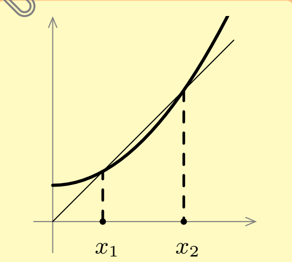
```
def f(x):
    return x**2-2

dichotomie(f,1,2,0.0001)
```

renvoie `1.41424560546875`. *Ainsi* $1,4142$ *est une approximation de* $\sqrt{2}$ *à* 10^{-4} *près.*

Remarque : Dans la pratique, inutile de faire un algorithme général. Pour l'exemple précédent, on peut écrire immédiatement :

3) Application à la recherche de point fixe

Rappelons (cf. chapitre 8) qu'un point fixe de $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sur I est un réel $a \in I$ tel que $f(a) = a$. La recherche de point fixe est centrale dans l'étude des suites récurrentes.



Interprétation géométrique : a est un point fixe de f si et seulement si le graphe de f coupe la droite d'équation $y = x$ (appelée aussi première bissectrice) au point d'abscisse a.

Par exemple, sur le premier dessin dans la marge, f admet deux points fixes x_1 et x_2.

Exemple : *Soit $f : [0\,;1] \longrightarrow [0\,;1]$ continue. Montrer que f admet un point fixe (voir le dessin en bas de page).*

On ne peut pas appliquer le TVI directement à f pour prouver l'existence d'un point fixe ! En effet, le TVI ne peut pas (tel quel) prouver l'existence d'un x tel que $f(x) = x$: il ne permet de trouver un antécédent que pour une quantité ***fixée*** *(à droite du signe $=$). D'où l'intérêt de l'introduction de la fonction g auxiliaire définie ci-dessous : on va utiliser le TVI pour prouver que 0 admet un antécédent par g, et pour cela, il n'y a aucun problème !*

Exemple : *Soit $f : [0\,;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $[0\,;1]$ soit inclus dans $f([0\,;1])$. Montrer que f admet un point fixe.*

⚠ *Ici, on ne suppose plus f à valeurs dans $[0\,;1]$, on suppose que tous les éléments de $[0\,;1]$ sont atteints par f (voir le dessin ci-contre).*

⚠ Comme expliqué ci-dessus, il serait complètement faux d'écrire : « Soit $x \in [0\,;1]$. Il existe x_0 tel que $f(x_0) = 0 \leqslant x$ et il existe x_1 tel que $f(x_1) = 1 \geqslant x$ donc, d'après le TVI, il existe x tel que $f(x) = x$ », car le TVI ne permet de trouver des antécédents que pour des quantités **fixées**. À la limite, le TVI prouve qu'il existe un réel m tel que $f(m) = x$, mais puisqu'il n'y a aucune raison pour que $m = x$, cela est d'un intérêt limité...

4) Autres versions du TVI

Les résultats de cette section sont aussi appelés Théorème des Valeurs Intermédiaires. On pourra donc les utiliser sous ce nom, sans préciser quelle version (les versions ci-dessous sont des appellations toutes personnelles et nous servirons à indiquer la version nous utiliserons).

Théorème (TVI – version 2). *Soit f une fonction continue sur I et à valeurs réelles. Notons*

$$M = \begin{cases} \sup\limits_{x\in I} f(x) & \text{si } f \text{ est majorée,} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad m = \begin{cases} \inf\limits_{x\in I} f(x) & \text{si } f \text{ est minorée,} \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors pour tout $t \in \,]m\,;M[$, il existe $c \in I$ tel que $f(c) = t$. Autrement dit, $]m\,;M[$ est inclus dans $f(I)$.

Nous avons supposé sans le dire que f n'est pas constante, sinon l'intervalle $]m\,;M[$ est vide.

Démonstration.

$\square$

Ce théorème dit que toute valeur intermédiaire entre l'$\inf$ et le $\sup$ est atteinte lorsque la fonction est continue sur un intervalle quelconque. C'est vrai en particulier entre toute valeur intermédiaire entre les limites en les bornes (puisqu'une telle valeur se situe encore entre l'$\inf$ et le $\sup$). On obtient donc le TVI (version 1 bis) :

Théorème (TVI – version 1 bis). *Soit f une fonction continue sur $]a\,;b[$ et à valeurs réelles avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. Si f admet des limites (finies ou infinies) en a et b alors, pour tout m comprise entre $\lim\limits_{a} f$ et $\lim\limits_{b} f$, il existe $c \in \,]a\,;b[$ tel que $f(c) = m$.*

Le réel c est même unique et est noté $\ln(2)$: cf. paragraphe I.4.b.

Exemples :

C'est faux si le degré de P n'est pas impair, comme on le voit avec $P : x \longmapsto x^2+1$, qui n'a pas de racine.

Théorème (TVI – version 3). *L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle (c'est-à-dire si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue sur I, alors $f(I)$ est un intervalle).*

DÉMONSTRATION.

□

Remarque : En regardant de plus près les démonstrations, on constante que la version 1 du TVI entraîne la version 2. Elle-même entraîne la version 1 bis et la version 3. Mais la version 1 bis entraîne aussi la version 1.

> *Il suffit de remarquer que, si f est continue en a et b, alors $f(a) = \lim\limits_{a} f$ et $f(b) = \lim\limits_{b} f$.*

Enfin la version 3 entraîne la version 1.

> *Comme $f([a;b])$ est un intervalle contenant $f(a)$ et $f(b)$ on a, par caractérisation des intervalles (cf. chapitre 2), $[f(a); f(b)] \subset f([a;b])$. Ainsi tout réel t compris entre $f(a)$ et $f(b)$ appartient à $f([a;b])$ et donc est atteint par un point c de $[a;b]$.*

Ainsi toutes les version du TVI sont équivalentes et on les appelle simplement le TVI.

5) Le corollaire du TVI

Corollaire. *Avec les mêmes hypothèses que dans le TVI et en supposant de plus f strictement monotone, alors c est unique.*

DÉMONSTRATION. Il suffit d'utiliser le fait (cf. chapitres 6 et 9) qu'une fonction strictement monotone est injective. □

Quand on dispose d'une fonction continue strictement monotone, quand utiliser le corollaire du TVI et quand utiliser le théorème de la bijection ? C'est simple :
• Si on veut montrer qu'une fonction est une bijection ou si on veut montrer des propriétés sur f^{-1}, alors on utilise le théorème de la bijection.
• Si on veut prouver qu'une équation du type $f(x) = c$ admet une unique solution, alors les deux permettent de répondre.
Le théorème de la bijection donne beaucoup d'autres résultats, mais il permet également de répondre à ce genre de question. On peut donc n'utiliser que le théorème de la bijection.

II Le théorème de la bijection

1) Le théorème

Théorème (de la bijection). *Soit f continue strictement monotone sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors $f(I)$ est un intervalle, f est une bijection de I dans $f(I)$ et sa bijection réciproque f^{-1} est continue sur $f(I)$ de même monotonie que f.*

Démonstration. Quitte à remplacer f par $-f$, on peut supposer que f est strictement croissante.

•

•

• Soient $\varepsilon > 0$ et $s_0 \in f(I)$. Posons $x_0 = f^{-1}(s_0)$. Nous voulons montrer l'existence de $\delta > 0$ tel que

$$\forall s \in f(I) \cap [s_0 - \delta, s_0 + \delta], \qquad |f^{-1}(s) - f^{-1}(s_0)| \leqslant \varepsilon.$$

— Si x_0 n'est pas une éventuelle extrémité de I, alors il existe $\alpha > 0$ tel que l'intervalle $]x_0 - \alpha\,; x_0 + \alpha[$ est inclus dans I. Notons $\varepsilon' = \min(\varepsilon, \alpha)$. La croissance de f sur I nous garantit que, pour tout $s \in f(I)$,

$$\begin{aligned} |f^{-1}(s) - x_0| \leqslant \varepsilon' \quad &\iff \quad x_0 - \varepsilon' \leqslant f^{-1}(s) \leqslant x_0 + \varepsilon' \\ &\iff \quad f(x_0 - \varepsilon') \leqslant s \leqslant f(x_0 + \varepsilon'). \end{aligned}$$

Le réel $\delta = \min\big(f(x_0) - f(x_0 - \varepsilon'), f(x_0 + \varepsilon') - f(x_0)\big)$ est strictement positif puisque $\varepsilon' > 0$ et f est strictement croissante. Si $s \in [s_0 - \delta\,; s_0 + \delta]$, alors

⋆ $s \geqslant s_0 - \delta \geqslant f(x_0) - (f(x_0) - f(x_0 - \varepsilon')) = f(x_0 - \varepsilon')$.

⋆ $s \leqslant s_0 + \delta \leqslant f(x_0) + f(x_0 + \varepsilon') - f(x_0) = f(x_0 + \varepsilon')$.

Ainsi $f(x_0 - \varepsilon') \leqslant s \leqslant f(x_0 + \varepsilon')$ et donc $|f^{-1}(s) - x_0| \leqslant \varepsilon' \leqslant \varepsilon$. Cela prouve la continuité de f^{-1} en s_0.

— Si x_0 est une éventuelle extrémité de I, alors il existe $\alpha > 0$ tel que $]x_0 - \alpha\,; x_0[$ ou $]x_0\,; x_0 + \alpha[$ est inclus dans I. En adaptant la preuve précédente, nous montrons que f^{-1} est aussi continue en s_0. □

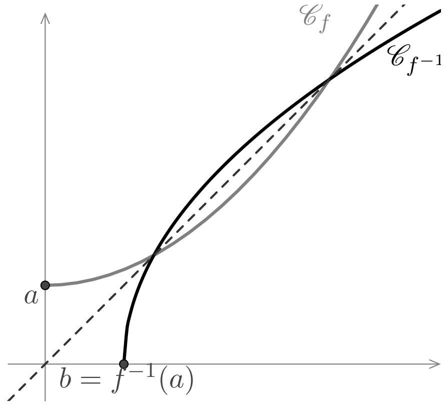
La fonction exponentielle est continue strictement croissante avec $e^x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ et $e^x \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$. D'après le théorème de la bijection, c'est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$. Notons $\ln$ sa bijection réciproque, qui est donc continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Nous renvoyons au chapitre 6 pour une étude approfondie du $\ln$, mais on voit que la continuité est donnée directement par le théorème de la bijection.

Remarque : Dans un repère orthonormé $(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ du plan, les courbes représentatives de f et de sa bijection réciproque sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Notons (Δ) la droite d'équation $y = x$. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Nous avons

$$\begin{aligned} M(x,y) \in \mathscr{C}_{f^{-1}} \quad &\iff \quad x \in I \text{ et } y = f(x) \quad \iff \quad y \in f(I) \text{ et } x = f^{-1}(y) \\ &\iff \quad M'(y,x) \in \mathscr{C}_{f^{-1}}. \end{aligned}$$

Un vecteur directeur de (Δ) est $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. Il est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix}y-x\\x-y\end{pmatrix}$ si bien que la droite $(M'M)$ est perpendiculaire à (Δ). Enfin le milieu du segment $[MM']$ est le point de coordonnées $\left(\dfrac{x+y}{2}, \dfrac{y+x}{2}\right)$ et il appartient bien à (Δ). Ainsi $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ et $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à (Δ).



2) Comment obtenir $f(I)$?

Comme dit dans le paragraphe I.1, quand nous savons que $f(b)$ est inférieur à $f(a)$, nous écrivons évidemment $[f(b)\,;f(a)]$.

Proposition. *Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a < b$. Le tableau suivant donne $f(I)$ lorsque f est continue et strictement croissante sur l'intervalle I :*

I	$[a\,;b]$	$]a\,;b]$	$[a\,;b[$	$]a\,;b[$
$f(I)$	$[f(a)\,;f(b)]$	$\left]\lim\limits_a f\,;f(b)\right]$	$\left[f(a)\,;\lim\limits_b f\right[$	$\left]\lim\limits_a f\,;\lim\limits_b f\right[$

Dans le cas où f est strictement décroissante :

I	$[a\,;b]$	$]a\,;b]$	$[a\,;b[$	$]a\,;b[$
$f(I)$	$[f(b)\,;f(a)]$	$\left[f(b)\,;\lim\limits_a f\right[$	$\left]\lim\limits_b f\,;f(a)\right]$	$\left]\lim\limits_b f\,;\lim\limits_a f\right[$

En particulier l'intervalle $f(I)$ est du même type (ouvert, fermé ou semi-ouvert) que l'intervalle I.

En pratique, plutôt que de s'embarrasser de 8 cas de figure que l'on risque de confondre le jour J, si on donne les hypothèses de continuité et de stricte monotonie, on peut se contenter de « lire » $f(I)$ sur le tableau de variations (et le théorème ci-contre nous autorise à le faire).

Démonstration. Traitons par exemple le cas où f est croissante et $I =]a\,;b]$ (les autres cas se traitent de manière analogue).

- Si $y \in f(]a\,;b])$, alors il existe $x \in]a\,;b]$ tel que $y = f(x)$. Puisque la fonction f est strictement croissante, on a $y = f(x) \leqslant f(b)$. De plus le théorème de la limite monotone nous assure l'existence de $\lim\limits_a f$. On en déduit que $y = f(x) \in \left]\lim\limits_a f\,;f(b)\right]$. Ainsi $f(I) \subset \left]\lim\limits_a f\,;f(b)\right]$.
- Réciproquement, si $y \in \left]\lim\limits_a f\,;f(b)\right]$, alors le TVI (version 1 bis) entraîne qu'il existe $x \in I$ tel que $y = f(x) \in f(I)$. Ainsi $\left]\lim\limits_a f\,;f(b)\right] \subset f(I)$. D'où l'égalité. □

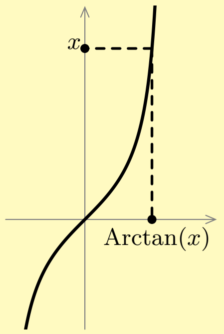
3) Un exemple : la fonction Arctangente

Proposition (fonction Arctangente). *La fonction tangente est une bijection de $]-\pi/2\,;\pi/2[$ sur $\mathbb{R}$. Sa fonction réciproque est appelée Arctangente et notée Arctan. Elle est impaire, continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et*

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{Arctan}(x) = \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} \mathrm{Arctan}(x) = -\frac{\pi}{2}.$$

On a $\mathrm{Arctan}(0) = 0$ et $\mathrm{Arctan}(1) = \dfrac{\pi}{4}$.

En d'autres termes : $\mathrm{Arctan}(x)$ est l'unique $y \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan(y) = x$ (de la même manière que, si $x \geqslant 0$, $\sqrt{x}$ est l'unique réel positif qui au carré donne x, ou si $x > 0$, $\ln(x)$ est l'unique réel dont l'exponentielle vaut x).

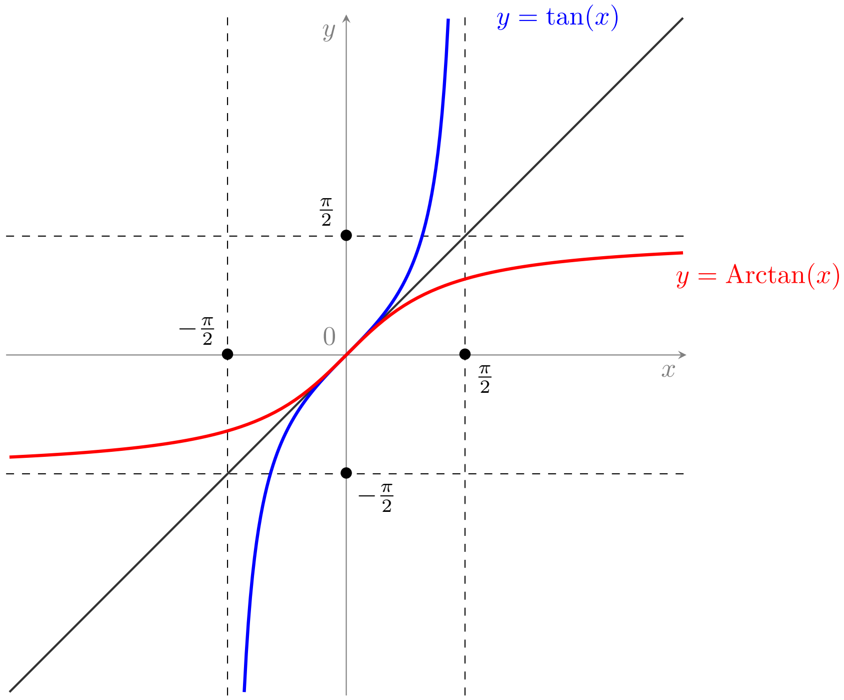


Par exemple, $\mathrm{Arctan}(2)$ est l'unique réel dans $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ dont la tangente vaut 2, de même que $\ln(2)$ est l'unique réel dont l'exponentielle vaut 2, ou que $\sqrt{2}$ est l'unique réel positif qui au carré donne 2.

Démonstration.

□

Courbe représentative :

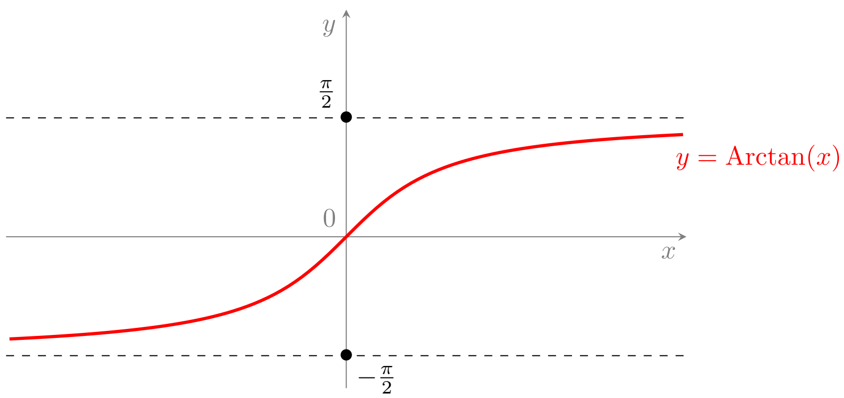


On n'a pas toujours $\mathrm{Arctan}(\tan(x)) = x$! Moyens mnémotechniques :
- La tangente n'est pas définie sur $\mathbb{R}$.
- Arctan est à valeurs dans $]-\pi/2\,;\pi/2[$. Par exemple, on a $\tan(\pi) = 0$ donc

$$\begin{aligned}&\mathrm{Arctan}(\tan(\pi))\\&\quad= \mathrm{Arctan}(0) = 0\end{aligned}$$

car la tangente est impaire. On n'a pas $\mathrm{Arctan}(\tan(\pi)) = \pi$!

Sans la fonction $\tan$ ni la première bissectrice :



Remarque : De manière imagée (toujours avoir ce dessin en tête pour se souvenir du théorème ci-dessous) :

$$\begin{tikzcd} \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[\arrow[r, bend left, "\tan"] & \mathbb{R} \arrow[l, bend left, "\mathrm{Arctan}"] \end{tikzcd}$$

Théorème.

- *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $\tan(\mathrm{Arctan}(x)) = x$.
- *Pour tout* $x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$, $\mathrm{Arctan}(\tan(x)) = x$.

Démonstration. Découle directement de la définition. □

On peut aussi programmer la fonction Arctan avec la méthode des rectangles (cf. chapitre 16).

Remarque : Si $x \in \mathbb{R}$ est implémenté en Python par `x`, alors `np.arctan(x)` renvoie (une approximation de) $\mathrm{Arctan}(x)$ mais cette commande n'est pas exigible. On peut l'implémenter avec la méthode de la dichotomie en utilisant le fait que $\mathrm{Arctan}(x)$ est l'unique antécédent de x par tan dans $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$:

4) Application à l'étude des suites implicites

On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie implicitement lorsque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit u_n comme l'unique solution d'une certaine équation dépendant de n.

> *Par exemple, on définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n la plus grande solution de l'équation $x^{n+2} + x^{n+1} + x = 1$.*

La première chose à faire quand on rencontre une telle suite (l'énoncé le demande) est de justifier que la suite est bien définie, c'est-à-dire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation admet une unique solution u_n).

Voyons deux cas de figure où le théorème de la bijection est utile.

a) Le cas où $f(u_n) = n$

Cette démarche se généralise si $f(u_n) = a_n$ avec $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite que l'on connaît explicitement et qui tend vers $+\infty$.

Supposons qu'il existe une fonction f continue, strictement monotone et telle que $\mathbb{N} \subset f(I)$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad f(u_n) = n.$$

La démarche (guidée en concours) est la suivante :

- On utilise le théorème de la bijection pour assurer que f réalise une bijection de I dans $f(I)$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme $n \in f(I)$, il existe un unique x tel que $f(x) = n$. Ce x dépend de n donc on le note u_n. Cela garantit que la suite est bien définie.
- On remarque que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f^{-1}(n)$.
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a donc la même monotonie que la fonction f^{-1} et donc la même monotonie que la fonction f (d'après le théorème de la bijection).
- Dans le cas où f est strictement croissante, en notant b l'extrémité droite (éventuellement infinie) de I, on a $f(x) \xrightarrow[x\to b]{} +\infty$ donc $f^{-1}(y) \xrightarrow[y\to+\infty]{} b$ et donc $u_n = f^{-1}(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} b$.

  Dans le cas où f est strictement décroissante, en notant a l'extrémité gauche (éventuellement infinie) de I, on a $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$ donc $f^{-1}(y) \xrightarrow[y\to+\infty]{} a$ et donc $u_n = f^{-1}(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$.

En l'absence d'unicité, la suite serait mal définie : quel antécédent de n, faudrait-il prendre ?

C'est le théorème de la limite monotone qui assure cela puisque f n'est pas bornée (en effet $\mathbb{N} \subset f(I)$).

Exemple : *On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n l'unique réel de $]0\,;1]$ tel que $u_n - \ln(u_n) = n + 1$. Montrons que la suite est bien définie et étudions ses variations et sa limite éventuelle.*

b) Le cas où $f_n(u_n) = 0$

Plus généralement, si on a $f_n(u_n) = c_n$ (avec c_n un réel), alors on raisonne avec les antécédents de c_n ou bien on peut se ramener à $f_n(u_n) = 0$ en remplaçant f_n par $f_n - c_n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on se donne une fonction f_n continue et strictement monotone sur un intervalle I_n tel que $0 \in f_n(I_n)$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad f_n(u_n) = 0.$$

La première chose à faire est d'essayer de réécrire le problème sous la forme $g(u_n) = n$ avec g une fonction qui ne dépend pas de n. Dans ce cas, on procède comme dans la paragraphe précédent. Si ce n'est pas possible, la démarche (guidée en concours) est la suivante :

En l'absence d'unicité, la suite serait mal définie : quel antécédent de 0, faudrait-il prendre ?

Bien garder en tête que $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$. C'est la seule chose que l'on sait !

- On se donne $n \in \mathbb{N}$. On utilise le théorème de la bijection pour assurer que f_n réalise une bijection de I_n dans $f_n(I_n)$. Ainsi, comme $0 \in f_n(I_n)$, il existe un unique x tel que $f_n(x) = 0$. Ce x dépend de n donc on le note u_n. Cela garantit que la suite est bien définie.
- On étudie le signe de $f_{n+1}(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
  — Supposons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1}(u_n) \geqslant 0$. On a alors $f_{n+1}(u_n) \geqslant f_{n+1}(u_{n+1})$. Si f_{n+1} est strictement croissante (resp. décroissante) pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $u_n \geqslant u_{n+1}$ (resp. $u_n \leqslant u_{n+1}$) pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (resp. croissante).

  — Supposons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1}(u_n) \leqslant 0$. On a alors $f_{n+1}(u_n) \leqslant f_{n+1}(u_{n+1})$. Si f_{n+1} est strictement croissante (resp. décroissante) pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $u_n \leqslant u_{n+1}$ (resp. $u_n \geqslant u_{n+1}$) pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (resp. décroissante).

  — Pour la limite de la suite, la monotonie assure son existence (finie ou infinie selon que la suite est bornée ou pas). Comme pour les suites « du type $u_{n+1} = f(u_n)$ » (étudiées dans le chapitre 6), on peut éventuellement raisonner par l'absurde pour montrer que la suite est non majorée/minorée. Le passage à la limite dans la relation $f_{n+1}(u_n) = 0$ permet souvent de trouver la limite. Laissez-vous guider sinon.

Ici f_n est la fonction $x \mapsto x^{n+2} + x^{n+1} + x$. En revanche il n'y a pas unicité de l'antécédent de 0 mais, pour pallier ce problème, on considère la plus grande des solutions. Il faut donc identifier un intervalle du type $]a\,;+\infty[$ sur lequel 0 admet un unique antécédent par f_n. Ce sera forcément le plus petit.

Exemple : *On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n la plus grande solution de l'équation $x^{n+2} + x^{n+1} + x = 1$. Montrons que la suite est bien définie et étudions ses variations et sa limite éventuelle.*

III Théorème des bornes atteintes

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle mais n'est pas forcément un intervalle de même nature (caractère ouvert/fermé/semi-ouvert/borné). Par exemple la fonction cosinus est continue sur $\mathbb{R}$ (intervalle ouvert non borné) mais $\cos(\mathbb{R}) = [-1\,;1]$ (intervalle fermé borné). Par contre l'image d'un segment par une fonction continue est un segment, comme nous allons le voir dans cette partie.

Définition. *On dit qu'une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ atteint ses bornes si il existe $s \in I$ et $t \in I$ tels que*

$$f(s) = \inf_{x\in I} f(x) \qquad \text{et} \qquad f(t) = \sup_{x\in I} f(x).$$

Autrement dit si il existe $s \in I$ et $t \in I$ tels que, pour tout $x \in I$, $f(s) \leqslant f(x) \leqslant f(t)$.

Théorème (des bornes atteintes). *Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.*

Démonstration. • Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$ avec $a \leqslant b$. Le résultat étant immédiat si $a = b$, supposons $a < b$ (raisonnement analogue si $a > b$).

Raisonnons par l'absurde et supposons que f n'est pas bornée sur $[a\,;b]$. On construit deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par dichotomie de telle sorte que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n < b_n$ et f n'est pas bornée sur $[a_n, b_n]$:

— On pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$.

— Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons construits a_n et b_n tel que $a_n < b_n$ et f n'est pas bornée sur $[a_n\,;b_n]$. Posons $c_n = \dfrac{a_n + b_n}{2} \in [a_n\,;b_n]$. Si f n'est pas bornée sur $[a_n\,;c_n]$, alors on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = c_n$. Si f est bornée sur $[a_n\,;c_n]$, alors forcément f n'est pas bornée sur $[c_n\,;b_n]$ (sinon f serait bornée sur $[a_n\,;b_n] = [a_n\,;c_n] \cup [c_n\,;b_n]$ et on a supposé le contraire) et on pose $a_{n+1} = c_n$ et $b_{n+1} = b_n$.

On montre de même que dans la démonstration du TVI que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes donc convergent vers un même réel $c \in [a\,;b]$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme f n'est pas bornée sur $[a_n\,;b_n]$, il existe $c_n \in [a_n\,;b_n]$ tel que $|f(c_n)| \geqslant n$. Par encadrement, $|f(c_n)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. De plus, $a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$ donc, d'après le théorème d'encadrement, $c_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} c$. La fonction f et la valeur absolue étant continues, $|f(c_n)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |f(c)| \in \mathbb{R}$, ce qui est absurde par unicité de la limite. Ainsi f est bornée sur $[a;b]$.

- Ensuite raisonnons par l'absurde et supposons que la borne inférieure m de f sur $[a,b]$ n'est pas atteinte, c'est-à-dire, pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) > m$. La fonction $g : x \longmapsto \dfrac{1}{f(x)-m}$ est donc bien définie, continue et positive sur $[a,b]$. Nous avons montré qu'une telle fonction est majorée. Soit $K > 0$ un majorant de g. Nous avons alors
$$\forall x \in [a,b], \qquad \frac{1}{f(x)-m} \leqslant K$$
et donc
$$\forall x \in [a,b], \qquad f(x) \geqslant m + \frac{1}{K}.$$
Cela contredit le fait que m est le plus grand des minorant de f. Ainsi la borne inférieure de f sur $[a,b]$ est atteinte.

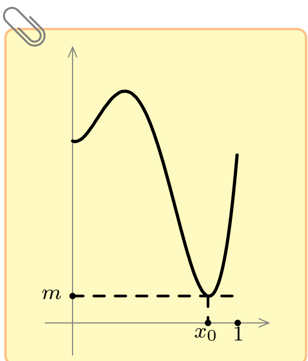
- De même, on montre que la borne supérieure de f sur $[a,b]$ est atteinte. □

Théorème. *L'image d'un segment par une fonction continue à valeurs réelles est un segment. Plus précisément, si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue, avec $a < b$, alors*
$$m = \min_{x\in[a,b]} f(x) \qquad \text{et} \qquad M = \max_{x\in[a,b]} f(x)$$
existent et on a $f([a,b]) = [m,M]$.

Démonstration.

□

Exemple : *Soit f continue strictement positive sur $[0\,;1]$. Montrons qu'il existe $m > 0$ tel que, pour tout $x \in [0\,;1]$, $f(x) \geqslant m$ (voir le dessin ci-contre).*



Attention, le résultat est faux si on ne se place pas sur un segment. En effet, « être minorée par une constante strictement positive » est une condition beaucoup plus forte que « être strictement positive ». En effet, une fonction strictement positive peut parfois être aussi proche que l'on veut de 0, tandis que si on minore une fonction par une constante strictement positive, il y a une espèce de « cylindre de sécurité » (voir le dessin ci-contre) entre la fonction et 0. Par exemple, la fonction inverse est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$ mais n'est minorée par aucune constante strictement positive (vous pouvez vous en convaincre en traçant le graphe de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$). D'où l'importance de se placer sur un segment !