Chapitre 13

# Limites de fonctions

Nous reviendrons notamment sur les limites et continuité en un point des fonctions usuelles listées et provisoirement admises dans le chapitre 6.

L'objectif de ce chapitre est de définir rigoureusement les différentes notions de limites, ainsi que la continuité en un point (qui n'est rien d'autre qu'une limite) d'une fonction de la variable réelle et à valeurs réelles. Nous allons ensuite démontrer de nombreuses propriétés analogues à celles des limites de suites.

Dans tout ce chapitre $I$ désigne un intervalle non vide et non réduit à un point et $f$ désigne une fonction définie sur $I$ et à valeurs réelles (sauf mention du contraire).

## I Limite et continuité en un point

### 1) Notion de voisinage

Souvent on prend pour voisinage de $a \in \mathbb{R}$, un intervalle ouvert centré en $a$, i.e. du type $V = ]a-\delta\,;a+\delta[$ avec $\delta > 0$. On peut toujours s'y ramener quitte à réduire l'amplitude du voisinage considéré.

**Définition (voisinage).**

- *Soit $a \in \mathbb{R}$. On appelle voisinage de $a$ tout intervalle contenant $a$ et dont $a$ n'est pas une extrémité.*
- *On appelle voisinage de $+\infty$ tout intervalle du type $]A\,;+\infty[$ ou $[A\,;+\infty[$, avec $A \in \mathbb{R}$.*
- *On appelle voisinage de $-\infty$ tout intervalle du type $]-\infty\,;A[$ ou $]-\infty\,;A]$ avec $A \in \mathbb{R}$.*

Ces propriétés sont appelées propriétés locales.

**Définition.** *Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty;+\infty\}$. On dit qu'une propriété $P$ (portant sur les réels) est vraie au voisinage de $a$ si il existe un voisinage $V$ de $a$ tel que, pour tout $x \in V$, $P(x)$ est vraie.*

### 2) Limite finie en un point

#### a) Définitions

Cette définition signifie que l'on peut rendre $f(x)$ aussi proche que l'on veut de $\ell$ (c'est-à-dire à distance $\varepsilon$ de $\ell$, pour tout $\varepsilon$) dès que $x$ est suffisamment proche de $a$ (à distance $\delta$ de $a$, pour un $\delta$ dépendant du choix de $x$).

**Définition.** *Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}$ un point de $I$ ou une éventuelle extrémité finie de $I$. On dit que $f$ admet $\ell$ pour limite en $a$ si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in I \cap [a-\delta\,;a+\delta], \quad |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon,$$

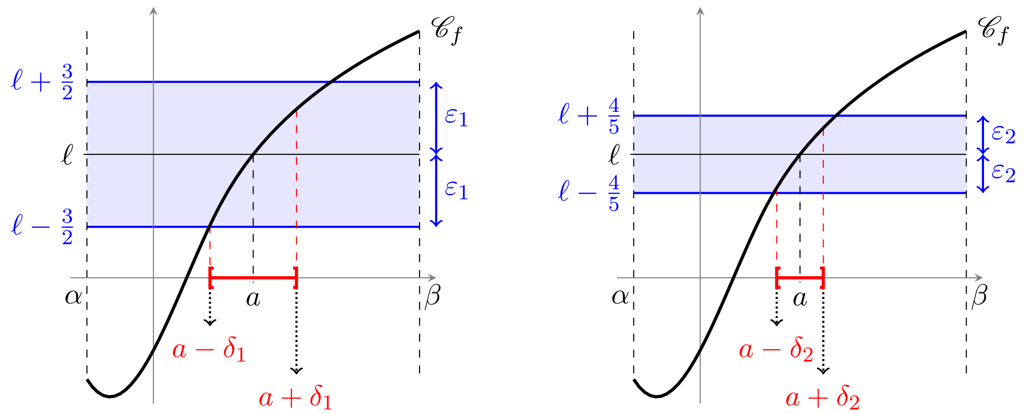
*ou encore*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in I, \quad \big(|x-a| \leqslant \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon\big).$$

*On note $\ell = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ ou $\ell = \lim\limits_{a} f$ ou encore $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$.*

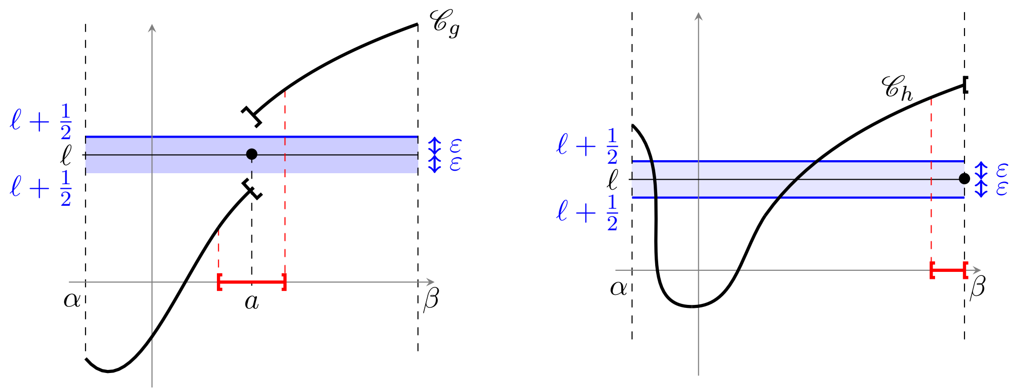
**Remarques :**

- On dit aussi que $f(x)$ tend vers $\ell$ quand $x$ tend vers $a$ ou que $f$ tend vers $\ell$ en $a$.
- Le réel $\delta$ dans la définition dépend de $a$ et de $\varepsilon$.
- Remplacer $|f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon$ par $|f(x)-\ell| < \varepsilon$ ou $|x-a| \leqslant \delta$ par $|x-a| < \delta$ dans la définition ne change rien (on a déjà expliqué pourquoi pour les suites dans le chapitre 8, ici c'est analogue).




Ci-dessus $f$ est définie sur $I = [\alpha\,;\beta]$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\alpha < \beta$. La fonction $f$ admet $\ell$ pour limite en $a \in I$. À gauche, nous avons choisi $\varepsilon_1 = 3/2$ et nous avons trouvé $\delta_1 > 0$ tel que, pour tout $x \in [a - \delta_1\,; a + \delta_1]$, les valeurs de $f(x)$ se retrouvent dans la bande bleue (i.e. $[\ell - \varepsilon_1\,; \ell + \varepsilon_1]$). À droite, nous avons choisi $\varepsilon_2 = 4/5$ et nous avons trouvé $\delta_2 > 0$ tel que, pour tout $x \in [a - \delta_2\,; a + \delta_2]$ (un intervalle plus resserré autour de $a$ que dans la figure de gauche), les valeurs de $f(x)$ se retrouvent dans la bande bleue (i.e. $[\ell - \varepsilon_2\,; \ell + \varepsilon_2]$).

Dans les deux exemples ci-contre, l'absence de limite finie en $a$ provient du fait que la courbe de la fonction présente un saut en $a$. Cela renvoie à l'approche intuitive de la notion de continuité (que l'on verra de façon rigoureuse dans les prochains paragraphes) : « une fonction est continue en $a$ si l'on peut tracer sa courbe au voisinage de $a$ sans lever le crayon. »




Ci-dessus à gauche, la fonction $g$ n'admet pas de limite en $a$. En effet, si elle admettait une limite finie $\ell$, alors on aurait $\ell = g(a)$ (cf. paragraphe I.2.c). Mais si on prend $\varepsilon = 1/2$ (bande bleue), on ne peut pas trouver de voisinage de $a$ dont tous les éléments ont leur image par $g$ dans la bande bleue. Ci-dessus à droite, la fonction $h$ n'admet pas non plus de limite en $a = \beta$ (l'extrémité droite de $I$). En effet, si elle admettait une limite finie $\ell$, alors on aurait $\ell = h(a)$. Mais si on prend $\varepsilon = 1/2$ (bande bleue), on ne peut pas trouver de voisinage de $a$ dont tous les éléments ont leur image par $h$ dans la bande bleue.

Nous verrons tous les exemples usuels dans la partie V.

***Exemple :***

Il suffit de remplacer $x$ par $a+h$ dans la définition quantifiée pour l'obtenir.

**Remarque :** On peut toujours se ramener à une limite en 0 en utilisant l'équivalence suivante :

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(a+h) \xrightarrow[h \to 0]{} \ell.$$

Il suffit d'écrire la définition quantifiée de ces trois limites et de constater que c'est la même.

On peut aussi se ramener à une limite nulle en utilisant l'équivalence suivante :

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(x) - \ell \xrightarrow[x \to a]{} 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \big|f(x) - \ell\big| \xrightarrow[x \to a]{} 0$$

La notion de limite en $a \in \mathbb{R}$ s'étend au cas où $f$ est définie sur $I \backslash \{a\}$ :

Par exemple : $\dfrac{\sin(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$, cf. chapitre 15.

**Définition.** *Soit $a \in I$. Soit $f$ une fonction définie sur $I \backslash \{a\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que $f$ admet $\ell$ pour limite en $a$ si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in I \cap \big([a-\delta\,;a[\,\cup\,]a\,;a+\delta]\big), \quad |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

### b) Limite à gauche et à droite

Mais qui n'est pas l'éventuelle extrémité gauche de $I$ puisqu'alors il n'y a « rien » à sa gauche.

**Définition (limite à gauche).** *Soit $a$ un réel qui appartient à $I$ ou qui est l'éventuelle extrémité droite de $I$. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que $f$ admet $\ell$ pour limite à gauche en $a$ (ou pour limite en $a^-$) si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in I \cap [a-\delta\,;a[\,, \quad |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

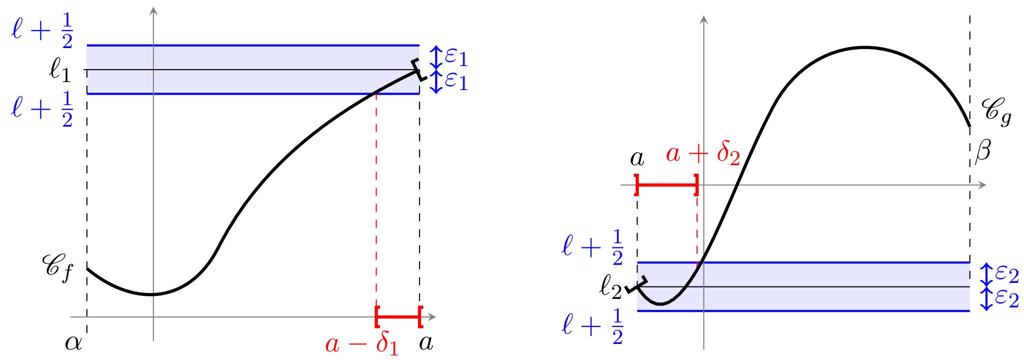
*On note $\ell = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ ou $\ell = \lim\limits_{a^+} f$ ou encore $f(x) \xrightarrow[x\to a^+]{} \ell$.*

Mais qui n'est pas l'éventuelle extrémité droite de $I$ puisqu'alors il n'y a « rien » à sa droite.

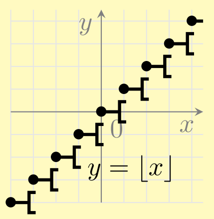
**Définition (limite à droite).** *Soit $a$ un réel qui appartient à $I$ ou qui est l'éventuelle extrémité gauche de $I$. On dit que $f$ admet $\ell$ pour limite à droite en $a$ (ou pour limite en $a^+$) si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in I \cap \,]a\,;a+\delta]\,, \quad |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

*On note $\ell = \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ ou $\ell = \lim\limits_{a^-} f$ ou encore $f(x) \xrightarrow[x\to a^-]{} \ell$.*




Les intervalles sont ouverts en $a$ ! Pour calculer une limite à gauche ou à droite en $a$, $a$ est exclu !




Ci-dessus $a$ est une extrémité de $I$. À gauche la fonction $g$ admet une limite à gauche en $a$. Nous avons choisi $\varepsilon_1 = 1/2$ et nous avons trouvé $\delta_1 > 0$ tel que, pour tout $x \in [a-\delta_1\,;a[$, les valeurs de $f(x)$ se retrouvent dans la bande bleue (i.e. $[\ell - \varepsilon_1\,;\ell+\varepsilon_1]$). À droite la fonction $g$ admet une limite à droite en $a$. Nous avons choisi $\varepsilon_2 = 1/2$ et nous avons trouvé $\delta_2 > 0$ tel que, pour tout $x \in \,]a\,;a+\delta_2]$, les valeurs de $g(x)$ se retrouvent dans la bande bleue (i.e. $[\ell - \varepsilon_2\,;\ell+\varepsilon_2]$).

***Exemple :*** *La fonction $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$ admet des limites à gauche et à droite en chaque réel. Plus précisément, pour tout $k \in \mathbb{Z}$,*

$$\lim_{x\to k^-} \lfloor x \rfloor = k - 1, \qquad \lim_{x\to k^+} \lfloor x \rfloor = k$$

*et, pour tout $a \in \,]k\,;k+1[$ (c'est-à-dire quand $a \notin \mathbb{Z}$), $\lim\limits_{x\to a^+} \lfloor x \rfloor = \lim\limits_{x\to a^-} \lfloor x \rfloor = a$.*

### c) Unicité de la limite

De même il y a unicité de la limite à gauche et de la limite à droite (sous réserve d'existence).

**Proposition (unicité de la limite).** *Soit $a$ un point de $I$ ou une éventuelle extrémité finie de $I$. Soit $f$ une fonction définie sur $I$ sauf éventuellement en $a$. Si $f$ admet $\ell \in \mathbb{R}$ et $\ell' \in \mathbb{R}$ pour limite en $a$, alors $\ell = \ell'$.*

Remarquons que cette preuve est très proche de celle de l'unicité de la limite d'une suite.

DÉMONSTRATION. Supposons que $f$ admette deux limites $\ell$ et $\ell'$ en $a$. Raisonnons par l'absurde et supposons que $\ell \neq \ell'$. Prenons $\varepsilon = \dfrac{|\ell - \ell'|}{4} > 0$.

- Il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in I \backslash \{a\}$ tel que $|x - a| \leqslant \delta$, $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$.
- Il existe $\delta' > 0$ tel que, pour tout $x \in I \backslash \{a\}$ tel que $|x - a| \leqslant \delta'$, $|f(x) - \ell'| \leqslant \varepsilon$.

Prenons $x \in I$ tel que $|x - a| \leqslant \min(\delta, \delta')$. Nous avons alors

En effet
$$|\ell - f(x)| = |f(x) - \ell|.$$

$$|\ell - \ell'| \leqslant |(\ell - f(x)) + (f(x) - \ell')| \leqslant |\ell - f(x)| + |f(x) - \ell'| \leqslant 2\varepsilon.$$

Ainsi $|\ell - \ell'| \leqslant |\ell - \ell'|/2$ et $|\ell - \ell'| \neq 0$ donc on peut simplifier, ce qui donne $1 \leqslant 1/2$. C'est absurde. Ainsi $\ell = \ell'$. $\square$

Dans le cas où $f$ est définie en $a$, on a mieux :

**Proposition.** *Si admet pour limite finie $\ell$ en $a \in I$ alors $\ell = f(a)$.*

Ainsi, pour prouver que $f$ n'a pas de limite en $a$, il suffit de prouver que $f$ ne tend pas vers $f(a)$.

DÉMONSTRATION.

$\square$

### d) Liens entre limite, limite à gauche, limite à droite

Intuitivement, en recollant les intervalles $]-\infty\,;a[$ et $]a\,;+\infty[$, il faut que les courbes représentatives de $f$ sur chacun de ces intervalles se « rejoignent ». Dans le cas où $f$ est définie en $a$, il faut de plus qu'elle se « rejoignent » en $f(a)$.

**Proposition.** *Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Soit $a \in I$ n'étant pas une éventuelle extrémité de $I$.*

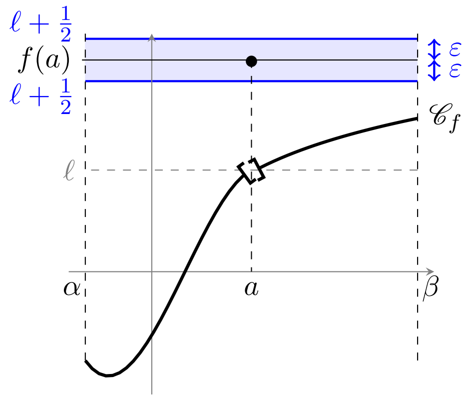
- ***Cas où $f$ n'est pas définie en $a$.***
$$\lim_a f = \ell \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{a^+} f = \lim_{a^-} f = \ell.$$
- ***Cas où $f$ est définie en $a$.***
$$\lim_a f = \ell \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \lim_{a^+} f = \lim_{a^-} f = \ell, \\ \ell = f(a). \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. Le sens direct découle de la définition des limites à gauches et à droite et du fait que, si $f$ est définie en $a$, alors $\ell = f(a)$ (cf. paragraphe précédent). Montrons la réciproque : supposons que $f$ admette $\ell$ pour limite à gauche et à droite en $a$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\delta_g > 0$ tel que, pour tout $x \in I \cap [a - \delta_g\,; a[$, $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$. Il existe $\delta_d > 0$ tel que, pour tout $x \in I \cap ]a\,; a + \delta]$, $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$. En prenant $\delta = \min(\delta_g, \delta_d)$, nous obtenons

$$\forall x \in I \cap \big([a - \delta\,; a[ \cup ]a\,; a + \delta_d]\big), \quad |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

- Si $f$ n'est pas définie en $a$, c'est terminé.
- Si $f$ est définie en $a$, alors la phrase quantifiée ci-dessus s'étend à tout l'intervalle $[a - \delta\,; a + \delta]$ car $|f(a) - f(a)| \leqslant \varepsilon$. Ainsi $f$ admet $\ell = f(a)$ pour limite en $a$. $\square$

Ici les courbes à gauche et à droite se « rejoignent » en une valeur commune mais qui n'est pas valeur en $a$. Il n'y a pas de limite !




Ci-contre la fonction est définie sur $I = [\alpha\,;\beta]$ avec $\alpha$ et $\beta$ deux réels tels que $\alpha < \beta$. Elle admet une limite à gauche et à droite en $a$ qui sont égales (à $\ell$ ici). Cependant $\ell \neq f(a)$. La fonction n'admet pas de limite en $a$.

## 3) Continuité

### a) Notion de continuité en un point

La continuité de $f$ en un point est une notion locale : seul compte le comportement de $f$ au voisinage de ce point.

On a vu que, si $f$ admet une limite $\ell$ en $a \in I$, alors $\ell = f(a)$. Cela motive la définition suivante :

**Définition (continuité en un point).** *On dit que $f$ est continue en $a \in I$ si $f$ admet une limite en $a$. Cette limite étant alors nécessairement $f(a)$, $f$ est continue en $a \in I$ si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} f(a)$. Avec des quantificateurs :*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in I \cap [a - \delta\,; a + \delta]\,, \quad |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon,$$

*ou encore*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in I, \quad \big(|x - a| \leqslant \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon\big).$$

Dans le cas contraire on dit que $f$ est discontinue en $a$ ou que $a$ est un point de discontinuité de $f$. La notion de continuité en $a$ n'est pas définie lorsque $a$ est une (éventuelle) extrémité réelle de $I$ qui n'appartient par à $I$. Dans le paragraphe I.3.c, nous introduirons la notion de prolongement par continuité.

***Exemples :*** *A part la fonction partie entière, toutes les fonctions usuelles vues dans le chapitre 6 sont continues en tout point de leur domaine de définition (nous montrerons que c'est le cas dans le paragraphe V.1).*

### b) Continuité à gauche ou à droite en un point

**Définition (continuité à gauche).** *Soit $a$ un point de $I$ qui n'est pas l'extrémité gauche de $I$. On dit que $f$ est continue à gauche en $a$ si $f$ admet $f(a)$ pour limite à gauche en $a$, c'est-à-dire si $f(x) \xrightarrow[x \to a^-]{} f(a)$. Avec des quantificateurs :*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in I \cap [a - \delta\,; a[\,, \quad |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon.$$

**Définition (continuité à droite).** *Soit $a$ un point de $I$ qui n'est pas l'extrémité droite de $I$. On dit que $f$ est continue à droite en $a$ si $f$ admet $f(a)$ pour limite à droite en $a$, c'est-à-dire si $f(x) \xrightarrow[x \to a^+]{} f(a)$. Avec des quantificateurs :*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in I \cap ]a\,; a + \delta]\,, \quad |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon.$$

Nous verrons au second semestre que la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle discrète est continue à droite en tout réel et admet des limites à gauche en tout réel (mais elle n'est pas continue à gauche a priori).

***Exemple :*** *La fonction partie entière est continue à droite en tout $a \in \mathbb{Z}$ mais pas continue à gauche (bien qu'admettant des limites à gauche).*

La proposition suivante est une conséquence de la proposition faisant le lien entre limites et limites à gauche/droite :

**Proposition.** *Soit $a$ un point de $I$ qui n'est pas une extrémité de $I$. La fonction $f$ est continue en $a$ si et seulement si $f$ est continue à gauche et à droite en $a$.*

### c) Prolongement par continuité

En général le prolongement de $f$ est encore noté $f$ (et non $\widetilde{f}$).

**Proposition.** *Soit $a \in I$. Soit $f$ une fonction définie sur $I\backslash\{a\}$ et à valeurs réelles. Supposons que $f$ admette une limite $\ell \in \mathbb{R}$ en $a$. Posons*

$$\begin{array}{rcccl} \widetilde{f} & : & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} f(x) & \text{si} \quad x \in I\backslash\{a\}, \\ \ell & \text{si} \quad x = a. \end{array} \right. \end{array} .$$

*Alors $\widetilde{f}$ est continue en $a$. On l'appelle prolongement par continuité de $f$ en $a$.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x$ dans $I \cap \big([a-\delta\,;a[\,\cup\,]a\,;a+\delta]\big)$, $|f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon$, c'est-à-dire $|\widetilde{f}(x)-\widetilde{f}(a)| \leqslant \varepsilon$. Nous avons bien sûr $|\widetilde{f}(a)-\widetilde{f}(a)| = 0 \leqslant \varepsilon$. Par conséquent

$$\exists \delta > 0, \qquad \forall x \in I \cap \big([a-\delta\,;a+\delta]\big), \qquad |\widetilde{f}(x)-\widetilde{f}(a)| \leqslant \varepsilon.$$

Par conséquent $\widetilde{f}$ est continue en $a$. $\square$

On ne peut prolonger (par continuité) une fonction en un point que si elle n'est pas déjà définie !

***Exemple :***

### d) Continuité sur un intervalle

Si $f$ est définie sur une partie $D$ de $\mathbb{R}$, on dit encore que $f$ est continue sur $D$ lorsqu'elle l'est en tout point de $D$.

**Définition.** *On dit que $f$ est continue sur $I$ si $f$ est continue en tout point de $I$. On note $C(I,\mathbb{R})$ ou $C^0(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur $I$ et à valeurs réelles.*

**Remarque :** Si $f$ est continue sur $I$, alors elle est continue sur tout intervalle $J$ non vide et non réduit à un point inclus dans $I$ (i.e. $f\big|_J$ est continue sur $J$).

***Exemple :*** *Toutes les fonctions usuelles vues dans le chapitre 6 sont continues sur leur domaine de définition (cf. paragraphe V.1)... sauf la fonction partie entière qui n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.*

En revanche elle l'est sur tous les intervalles $]k\,;k+1[$, $k \in \mathbb{Z}$ (car constante sur chacun de ces intervalles).

**Remarque :** Attention aux fonctions définies « par cas ». Même s'il est vrai que la continuité est une notion locale, il faut faire attention dans le cas où l'expression de $f$ varie selon le domaine considéré. Par exemple, si $f$ est la fonction valant $1$ sur $\mathbb{R}_+$ et $0$ sur $\mathbb{R}_-^*$, qui irait sérieusement dire que $f$ est continue sur $\mathbb{R}$ car la fonction nulle et la fonction constante égale à $1$ sont continues ? Tout ce qu'on peut dire est que $f$ est continue à droite en $0$ car l'inégalité est large ($f(x) = 1$ si $x \geqslant 0$). En conclusion, il faut faire attention aux points de recollement. Avec l'exemple ci-dessus, on peut affirmer que $f$ est continue sur $\mathbb{R}^*$, continue à droite en $0$, et si $x < 0$, $f(x) = 0 \xrightarrow[x\to 0^-]{} 0 \neq f(0) = 1$ donc $f$ n'est pas continue à gauche donc n'est pas continue en $0$.

## 4) Limite infinie en un point de $\mathbb{R}$

Par exemple : $\tan(x) \xrightarrow[x\to(\frac{\pi}{2})^-]{} +\infty$, cf. paragraphe V.2.

**Définition (limite infinie à gauche).** *On suppose que $I$ admet une extrémité droite $a$ telle que $a \notin I$. On dit que $f$ admet $\underset{-\infty}{+\infty}$ pour limite à gauche en $a$ si*

$$\forall A \underset{<}{>} 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in I \cap [a-\delta\,; a[\,, \quad f(x) \underset{\leqslant}{\geqslant} A.$$

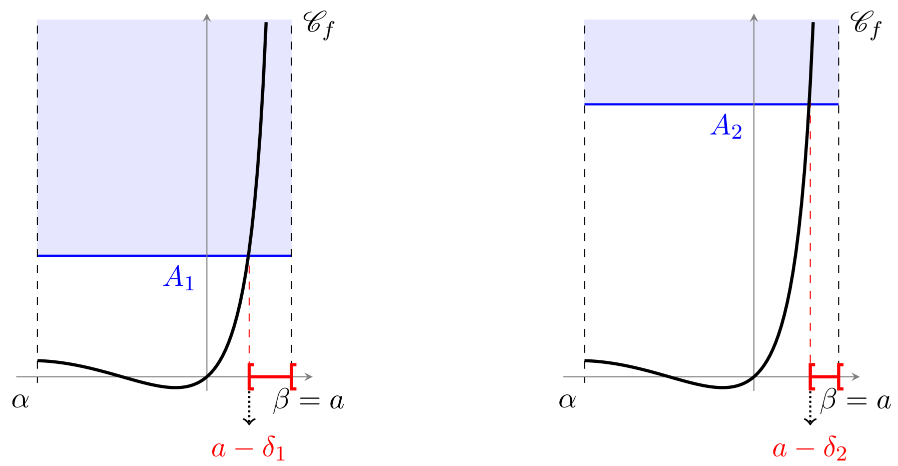
*On note alors* $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \underset{-\infty}{+\infty}$, $\lim\limits_{a^-} f = \underset{-\infty}{+\infty}$ *ou* $f(x) \xrightarrow[x\to a^-]{} \underset{-\infty}{+\infty}$.

Par exemple : $\ln(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty$, cf. paragraphe V.2.

**Définition (limite infinie à droite).** *On suppose que $I$ admet une extrémité gauche $a$ telle que $a \notin I$. On dit que $f$ admet $\underset{-\infty}{+\infty}$ pour limite à droite en $a$ si*

$$\forall A \underset{<}{>} 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in I \cap ]a\,; a+\delta]\,, \quad f(x) \underset{\leqslant}{\geqslant} A.$$

*On note alors* $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \underset{-\infty}{+\infty}$, $\lim\limits_{a^+} f = \underset{-\infty}{+\infty}$ *ou* $f(x) \xrightarrow[x\to a^+]{} \underset{-\infty}{+\infty}$.




Ci-dessus $f$ est définie sur $I = [\alpha\,;\beta[$ avec $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\alpha < \beta$. La fonction $f$ tend vers $+\infty$ en $a = \beta^-$. À gauche, nous avons choisi $A_1 = 2$ et nous avons trouvé $\delta_1 > 0$ tel que, pour tout $x \in [a-\delta_1\,; a[$, les valeurs de $f(x)$ se trouvent dans la bande bleue (i.e. $[A_1\,;+\infty[$). À droite, nous avons choisi $A_2 = 9/2$ et nous avons avons trouvé $\delta_2 > 0$ tel que, pour tout $x \in [a-\delta_2\,; a[$ (un intervalle plus resserré autour de $a$ que dans la figure de gauche), les valeurs de $f(x)$ se trouvent dans la bande bleue (i.e. $[A_2\,;+\infty[$).

## 5) Limite en $\pm\infty$

Par exemple : $e^x \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$, cf. paragraphe V.2.

**Définition (limite finie en $\pm\infty$).** *Soit $\ell \in \mathbb{R}$.*

1. *Si $+\infty$ est une extrémité de $I$, alors on dit que $f$ admet $\ell$ pour limite en $+\infty$ si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists A > 0, \quad \forall x \in I, \quad \big(x \geqslant A \quad\Longrightarrow\quad |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon\big).$$

2. *Si $-\infty$ est une extrémité de $I$, alors on dit que $f$ admet $\ell$ pour limite en $-\infty$ si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists A < 0, \quad \forall x \in I, \quad \big(x \leqslant A \quad\Longrightarrow\quad |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon\big).$$

La preuve est analogue à celle pour les suites.

**Proposition (unicité de la limite).** *Si $f$ admet une limite finie en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$), alors celle-ci est unique.*

Par exemple : $e^x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, cf. paragraphe V.2.

**Définition (limite infinie en $\pm\infty$).**

1. *Si $+\infty$ est une extrémité de $I$, alors on dit que $f$ admet $\underset{\color{red}-\infty}{+\infty}$ pour limite en $+\infty$ si*
$$\forall A \underset{\color{red}<}{>} 0, \quad \exists B > 0, \quad \forall x \in I, \quad (x \geqslant B \implies f(x) \underset{\color{red}\leqslant}{\geqslant} A).$$
2. *Si $-\infty$ est une extrémité de $I$, alors on dit que $f$ admet $\underset{\color{red}-\infty}{+\infty}$ pour limite en $-\infty$ si*
$$\forall A \underset{\color{red}<}{>} 0, \quad \exists B < 0, \quad \forall x \in I, \quad (x \leqslant B \implies f(x) \underset{\color{red}\leqslant}{\geqslant} A).$$

Si $f$ admet $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$ comme limite en $a = \pm\infty$, alors on note encore $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$ $\ell = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ ou $\ell = \lim\limits_{a} f$.

## 6) Une seule définition pour toutes les limites (HP)

Les neuf types de limites (et leurs variantes à gauche et à droite) peuvent être résumées en une seule définition :

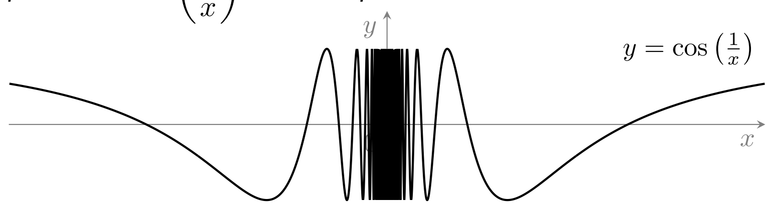
*Soit $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$. Soit $a$ un élément de $I$ ou une de ses extrémités réelle ou infinie ($\pm\infty$). Une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ admet $\ell$ pour limite en $a$ si et seulement si :*
$$\forall \begin{array}{c}\textit{voisinage}\\ V \textit{ de } \ell\end{array}, \quad \exists \begin{array}{c}\textit{voisinage}\\ W \textit{ de } a\end{array}, \quad \forall x \in I \cap W, \quad f(x) \in V.$$

## 7) Fonctions n'admettant pas de limite

Cf. paragraphe suivant pour une preuve.

⚠ Il se peut aussi que $f$ n'admette pas de limite (ni finie, ni infinie) en un point ou en $\pm\infty$.

*Par exemple $x \longmapsto \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite en $0$.*




# II Résultats généraux sur les limites

⚠ La notation $\mathcal{A}_I$ est **personnelle**, il ne faut pas l'utiliser en concours à moins de la redéfinir.

Dans ce paragraphe, pour simplifier les notations, on note $\mathcal{A}_I$ l'ensemble des éléments de $I$ et de ses extrémités réelles ou infinies. On introduit aussi deux fonctions $g$ et $h$ définies sur $I$.

## 1) Théorèmes de composition des limites

### a) Image d'une suite convergente par une fonction

**Proposition.** *Soient $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$ et $a \in \mathcal{A}_I$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dont les termes appartiennent à $I$ à partir d'un certain rang. Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$ et $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$, alors $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.*

Dans ce paragraphe, on montre les résultats énoncés dans le paragraphe IV.1 du chapitre 8.

Démonstration.

□

***Exemple :***

Autre preuve : comme $w_n = \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, $f(w_n) = \cos(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. On a vu dans l'exercice 7 du chapitre 8 que la suite $(\cos(n))_{n\geqslant 1}$ n'admet pas de limite.

***Exemple :***

Ce résultat est très important comme on l'a vu dans le chapitre 6 avec les points fixes. Attention la continuité est indispensable : $1 - \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ mais $\left\lfloor 1 - \dfrac{1}{n} \right\rfloor = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $0 \neq \lfloor 1 \rfloor$.

**Corollaire.** *Soit $a \in I$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dont les termes appartiennent à $I$ à partir d'un certain rang. Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$ et si $f$ est continue en $a$, alors $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(a)$.*

***Exemple :***

Encore cet immense classique dont nous avons déjà parlé dans le chapitre 8...

### b) Limite et continuité d'une fonction composée

Soit $J$ un intervalle non vide et non réduit à un point.

**Théorème.** *Soient $a \in \mathcal{A}_I$, $b \in \mathcal{A}_J$ et $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$. Soit $u$ une fonction définie sur $J$ et telle que $u(J) \subset I$. Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$ et $u(t) \xrightarrow[t\to b]{} a$, alors $f \circ u(t) \xrightarrow[t\to b]{} \ell$.*

Démonstration. Supposons que $b = +\infty$, $a \in \mathbb{R}$ et $\ell = -\infty$ (les autres cas sont analogues).

On se donne $A < 0$ puisque la limite de $f \circ u$ est $-\infty$. On cherche $B > 0$ puisqu'on veut la limite en $+\infty$. Le $\delta$ n'est qu'un intermédiaire pour traduire le fait que $f$ tend vers $\ell$ en $a \in \mathbb{R}$.

□

**Corollaire.** *Soient $a \in I$ et $b \in J$. Soit $u$ une fonction définie sur $J$ et telle que $u(J) \subset I$. Si $u$ est continue en $b$ et $f$ est continue en $a$, alors $f \circ u$ est continue en $b$.*

On rappelle qu'une fonction est continue sur $I$ si elle est continue en tout point de $I$.

**Proposition.** *Soit $u$ une fonction définie sur $J$ et telle que $u(J) \subset I$. Si $u$ est continue sur $J$ et $f$ est continue sur $I$, alors $f \circ u$ est continue sur $J$.*

Attention, une composée de fonctions continues à droite (respectivement à gauche) n'est pas forcément continue à droite (respectivement à gauche), alors qu'une somme, un produit etc. de fonctions continues à droite est continue à droite par exemple (cf. paragraphe II.4). La raison est qu'une fonction décroissante « change la droite en gauche » : plus précisément, si $u$ est décroissante, alors $u(x) \xrightarrow[x\to b^+]{} u(b)^-$ ($u$ transforme les valeurs supérieures à $b$ en valeurs inférieures à $u(b)$) et si $f$ est continue à droite en $u(a)$, on n'a pas forcément $f\circ u(x) \xrightarrow[x\to b^+]{} f\circ u(b)$.

L'exemple ci-contre n'est pas à connaître explicitement. Retenez simplement qu'une composée de fonctions continues à droite ou à gauche ne l'est pas forcément, et qu'il faut étudier ce genre de fonctions au cas par cas.

***Exemple :*** *Soit $g : x \longmapsto \lfloor 1/x \rfloor$. On a $y = 1/x \xrightarrow[x\to 1^+]{} 1^-$ et $\lfloor y \rfloor \xrightarrow[y\to 1^-]{} 0$, si bien que, par composition, $f(x) \xrightarrow[x\to 1^+]{} 0 \neq f(1)$ : $f$ n'est pas continue à droite en $1$, alors que $f$ est composée de deux fonctions continues à droite (la fonction inverse et la partie entière) sur leur ensemble de définition (cf. le paragraphe V.1. pour la fonction inverse et le paragraphe I.3.b pour la partie entière).*

## 2) Limites et relation d'ordre

La plupart des propositions suivantes sont analogues (et leur preuve aussi) à celles sur les suites admettant une limite (en $+\infty$ forcément) dans $\mathbb{R}\cup\{-\infty;+\infty\}$. Ainsi nous les laissons en exercice, sauf exceptions.

**Proposition.** *Soit $a \in \mathcal{A}_I$. Si $f$ admet une limite finie en $a$, alors $f$ est bornée sur un voisinage de $a$ dans $I$.*

**Proposition.** *Soit $a \in \mathcal{A}_I$. Supposons que $f$ admette $\ell \in \mathbb{R}\cup\{-\infty;+\infty\}$ pour limite en $a$.*

1. *Si $\alpha$ et $\beta$ sont des réels tels que $\ell \in ]\alpha\,;\beta[$, alors il existe un voisinage $V$ de $a$ tel que, pour tout $x \in I\cap V$, $f(x) \in ]\alpha\,;\beta[$.*
2. *Si $\ell > 0$ ou $\ell = +\infty$, , alors il existe un voisinage $V$ de $a$ tel que, pour tout $x \in V$, $f(x) > 0$.*
3. *Si $\ell < 0$ ou $\ell = -\infty$, alors il existe un voisinage $V$ de $a$ tel que, pour tout $x \in V$, $f(x) < 0$.*

Les deux résultats précédents permettent de transférer des propriétés d'ordre sur la limite aux images de la fonction (sur un voisinage). Nous allons voir que des propriétés d'ordre sur la fonction se transfèrent sur la limite.

Pour utiliser ces théorèmes on doit auparavant avoir montré l'existence des limites.

**Théorème (Les inégalités larges passent à la limite).** *Soit $a \in \mathcal{A}_I$. Supposons que $f$ admette $\ell \in \mathbb{R}\cup\{-\infty;+\infty\}$ pour limite en $a$ et que $g$ admette $\ell' \in \mathbb{R}\cup\{-\infty;+\infty\}$ pour limite en $a$. Si $f \leqslant g$ sur un voisinage de $a$, alors $\ell \leqslant \ell'$.*

Par exemple, prenons $f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto -\dfrac{1}{x}$ et $g : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \dfrac{1}{x}$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) < g(x)$. Pourtant $f$ et $g$ admettent tous les deux $0$ pour limite en $+\infty$.

LES INÉGALITÉS STRICTES NE PASSENT PAS A LA LIMITE.

**Corollaire.** *Soient $a \in \mathcal{A}_I$, $\ell \in \mathbb{R}\cup\{-\infty;+\infty\}$ et $m \in \mathbb{R}$. Supposons que $f$ admette $\ell$ pour limite en $a$.*

1. *Supposons que $f \leqslant m$ au voisinage de $a$. Alors $\ell \leqslant m$.*
2. *Supposons que $m \leqslant f$ au voisinage de $a$. Alors $m \leqslant \ell$.*

Si $f(x) \geqslant 0$ et si $f$ admet une limite $\ell$ en $a$ alors $\ell \geqslant 0$. Cependant, si $f(x) > 0$, on n'a pas forcément $\ell > 0$ (prendre $f : x \longmapsto 1/x$). Tout ce qu'on peut dire est que $\ell \geqslant 0$.

En poussant un peu, on peut dire que le passage à la limite transforme les inégalités strictes en inégalités larges.

## 3) Théorèmes d'encadrement et de comparaison

**Théorème (encadrement).** *Supposons que*

- *Au voisinage de $a \in \mathcal{A}_I$, on a $f \leqslant g \leqslant h$.*
- *Les fonctions $f$ et $h$ admettent $\ell \in \mathbb{R}$ pour limite en $a$.*

*Alors $g$ admet $\ell$ pour limite en $a$.*

**Corollaire.** *Soient $\ell \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathcal{A}_I$. Supposons que $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$.*

1. *Si pour tout $x$ dans un voisinage de $a$, $|f(x) - \ell| \leqslant g(x)$, alors $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$.*
2. *Si $f$ est bornée sur au voisinage de $a$, alors $f(x)g(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$.*

Comme dans le chapitre 8, on remarque que, dans le cas des limites infinies, une seule inégalité suffit.

**Théorème (comparaison).** *Soient $a \in \mathcal{A}_I$. Supposons que $f \leqslant g$ au voisinage de $a$.*

1. *Si $f$ admet $+\infty$ pour limite en $a$, alors $g$ aussi.*
2. *Si $g$ admet $-\infty$ pour limite en $a$, alors $f$ aussi.*

## 4) Opérations algébriques sur les limites

**Définition (limites $0^+$ et $0^-$).** *Soit $a \in \mathcal{A}_I$. On note $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0^+$ (respectivement $0^-$) pour signifier que $f$ tend vers $0$ en $a$ tout en étant strictement positive (respectivement négative) au voisinage de $a$.*

On parle de forme indéterminée (et on note F.I. dans les tableaux) quand on ne peut pas déterminer la limite d'une opération sur les suites de manière générale. On renvoie aux contre-exemples vus dans le chapitre 8 (il suffit de remplacer $n$ par $x$).

**Proposition.** *Soient $\lambda$, $\ell$ et $\ell'$ des réels. Soit $a \in \mathcal{A}_I$. On suppose que $f$ et $g$ admettent des limites en $a$.*

$$\lim_{x \to a} (f(x) + g(x))$$

| $\lim_{x\to a} g(x)$ \ $\lim_{x\to a} f(x)$ | $\ell$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\ell'$ | $\ell + \ell'$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | F.I. |
| $-\infty$ | $-\infty$ | F.I. | $-\infty$ |

$\lim_{x \to a} (\lambda f(x))$ :

| $\lim_{x\to a} f(x)$ | $\ell$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\lambda > 0$ | $\lambda\ell$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $\lambda = 0$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| $\lambda < 0$ | $\lambda\ell$ | $-\infty$ | $+\infty$ |

$\lim_{x \to a} |f(x)|$ :

| $\lim_{x\to a} f(x)$ | $\ell$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\lim_{x\to a} \lvert f(x)\rvert$ | $\lvert\ell\rvert$ | $+\infty$ | $+\infty$ |

$\lim_{x \to a} \dfrac{1}{g(x)}$ :

| $\lim_{x\to a} g(x)$ | $\ell' \neq 0$ | $0^+$ | $0^-$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\lim_{x\to a} \dfrac{1}{g(x)}$ | $\dfrac{1}{\ell'}$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $0^+$ | $0^-$ |

$\lim_{x \to a} (f(x)g(x))$ :

| $\lim_{x\to a} g(x)$ \ $\lim_{x\to a} f(x)$ | $\ell > 0$ | $\ell < 0$ | $\ell = 0$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\ell' > 0$ | $\ell\ell'$ | $\ell\ell'$ | $0$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $\ell' < 0$ | $\ell\ell'$ | $\ell\ell'$ | $0$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $\ell' = 0$ | $0$ | $0$ | $0$ | F.I. | F.I. |
| $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | F.I. | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | F.I. | $-\infty$ | $+\infty$ |

Tous ces résultats sont vrais si on remplace $a$ par $a^+$ ou par $a^-$.

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} :$$

| $\lim_{x\to a} g(x)$ \ $\lim_{x\to a} f(x)$ | $\ell > 0$ | $\ell < 0$ | $\ell = 0$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\ell' > 0$ | $\frac{\ell}{\ell'}$ | $\frac{\ell}{\ell'}$ | $0$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $\ell' < 0$ | $\frac{\ell}{\ell'}$ | $\frac{\ell}{\ell'}$ | $0$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $0^+$ | $+\infty$ | $-\infty$ | *F.I.* | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $0^-$ | $-\infty$ | $+\infty$ | *F.I.* | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $+\infty$ | $0^+$ | $0^-$ | $0$ | *F.I.* | *F.I.* |
| $-\infty$ | $0^-$ | $0^+$ | $0$ | *F.I.* | *F.I.* |

Montrer ce théorème est très technique et très fastidieux (il y a plus de 150 cas à traiter) et n'est pas le but du programme d'ECG. Nous renvoyons au chapitre 8 pour un exemple d'une preuve dans le cas des limites en $+\infty$.

DÉMONSTRATION. Montrons par exemple que $\frac{1}{g(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$ si $g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0^-$. On a $|g(x)| \xrightarrow[x\to a]{} |\ell'|$. Ainsi il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in I \cap [a-\alpha, a+\alpha], \qquad |g(x)| > \frac{|\ell'|}{2} > 0.$$

Donnons-nous $\varepsilon > 0$ et notons $\varepsilon' = \frac{(\ell')^2\varepsilon}{2}$. Il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in I \cap [a-\delta\,; a+\delta]\,, \qquad |g(x) - \ell'| \leqslant \varepsilon'.$$

Posons $\eta = \min(\delta, \alpha)$. On a, pour tout $x \in I \cap [a-\eta, a+\eta]$,

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{\ell'}\right| = \frac{|g(x)-\ell'|}{|g(x)\ell'|} \leqslant \varepsilon' \frac{1}{|\ell'|}\frac{2}{|\ell'|} = \varepsilon.$$

Par conséquent $\frac{1}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} \frac{1}{\ell'}$. □

Nous déduisons des opérations algébriques sur les limites celles sur les fonctions continues en un point.

Les résultats précédents étant encore valables en remplaçant $a$ par $a^+$ ou par $a^-$, les deux propositions ci-contre sont encore valables en remplaçant « continues » par « continues à droite (respectivement à gauche) ». Attention, ce n'est plus vrai pour une composée (cf. paragraphe II.1.b).

**Proposition.** *Supposons que $f$ et $g$ sont continues en $a \in I$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors les fonctions $|f|$, $\lambda f$, $f+g$ et $fg$ sont continues en $a$. De plus, si $g(a) \neq 0$, alors les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues en $a$.*

**Proposition.** *Supposons que $f$ et $g$ sont continues sur $I$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors les fonctions $|f|$, $\lambda f$, $f+g$ et $fg$ sont continues sur $I$. De plus, si $g$ ne s'annule pas sur $I$, alors les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues sur $I$.*

## III Le théorème de la limite monotone

**Proposition.**

- *Si $f$ est majorée sur $I$, alors l'ensemble $f(I) = \{f(x) \,|\, x \in I\}$ est non vide est majoré. Il admet donc une borne supérieure que l'on note $\sup_{x\in I} f(x)$ ou $\sup_I f$.*
- *Si $f$ est minorée sur $I$, alors l'ensemble $f(I) = \{f(x) \,|\, x \in I\}$ est non vide et minoré. Il admet donc une borne inférieure que l'on note $\inf_{x\in I} f(x)$ ou $\inf_I f$.*

**Théorème (de la limite monotone).** *Soit $f$ une fonction croissante sur $]a\,;b[$, avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$.*

1. *Si $f$ est majorée sur $]a\,;b[$, alors $f$ admet une limite finie en $b$ et cette limite est $\sup\limits_{x\in]a\,;b[} f(x)$. Sinon $f(x) \xrightarrow[x\to b]{} +\infty$.*
2. *Si $f$ est minorée sur $]a\,;b[$, alors $f$ admet une limite finie en $a$ et cette limite est $\inf\limits_{x\in]a\,;b[} f(x)$. Sinon $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} -\infty$.*
3. *Pour tout $c \in \,]a\,;b[$, $f$ admet une limite finie à gauche et une limite finie à droite. De plus, $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) \leqslant f(c) \leqslant \lim\limits_{x\to c^+} f(x)$ avec égalité si et seulement si $f$ est continue en $c$.*

**Remarques :**

- Nous avons des résultats analogues quand $f$ est décroissante (il suffit de remplacer $f$ par $-f$ dans le théorème et la preuve).
- Ainsi toute fonction monotone sur $]a\,;b[$ admet des limites (éventuellement infinies) en $a^+$ et $b^-$.

Démonstration.

1. Supposons que $f$ est majorée sur $I = \,]a\,;b[$ et notons $\ell$ la borne supérieure de $f(]a\,;b[)$. Donnons-nous $\varepsilon > 0$. Par caractérisation de $\ell$, il existe $y \in \,]a\,;b[$ tel que $\ell - \varepsilon \leqslant f(y)$. Si $x \in [y\,;b[$ alors, par croissance de $f$,

$$\ell - \varepsilon \leqslant f(y) \leqslant f(x) \leqslant \ell \leqslant \ell + \varepsilon.$$

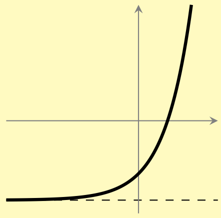
D'où $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$.

   - Si $b = +\infty$, on pose $B = y$ et on a, pour tout $x \in I \cap [B\,;+\infty[ \,= [y\,;b[$, $|f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon$. Ainsi $f(x) \xrightarrow[x\to b^-]{} \ell$.
   - Si $b \in \mathbb{R}$, on pose $\delta = b - y > 0$ et on a, pour tout $x \in I \cap [b-\delta\,;b[ \,= [y\,;b[$, $|f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon$. Ainsi $f(x) \xrightarrow[x\to b^-]{} \ell$.

   Supposons que $f$ ne soit pas majorée sur $]a\,;b[$. Pour tout $A > 0$, il existe alors $y \in \,]a\,;b[$ tel que $f(y) > A$. Si $x \in [y\,;b[$ alors, par croissance de $f$, on a $f(x) > A$. Comme précédemment, on conclut alors que $f$ admet pour limite $+\infty$ en $b$.

2. Supposons que $f$ soit minorée sur $]a\,;b[$. Alors la fonction $g : x \longmapsto -f(-x)$ est croissante et majorée sur $]-b\,;-a[$. Par conséquent elle admet une limite finie en $-a$. Nous en déduisons que $f$ admet $\sup\limits_{]-b\,;-a[} g = \inf\limits_{]a\,;b[} f$ pour limite finie en $a$. Si $f$ n'est pas minorée alors $g$ n'est pas majorée et donc $g$ admet $+\infty$ pour limite en $-a$. Ainsi $g$ admet $-\infty$ pour limite en $a$.
3. Soit $c \in \,]a\,;b[$. Alors $f$ est croissante et majorée par $f(c)$ sur l'intervalle $]a\,;c[$. Ainsi $f$ admet une limite à gauche en $c$ qui est majorée par $f(c)$. De plus $f$ est croissante et minorée par $f(c)$ sur l'intervalle $]c\,;b[$. Ainsi $f$ admet une limite à droite en $c$ qui est minorée par $f(c)$. D'où l'inégalité annoncée. Le cas d'égalité découle des liens entre limites et limites à gauche et droite. □

Vous avez bien lu : une fonction croissante minorée admet une limite en la borne inférieure de $I$. Voici le graphe d'une fonction croissante minorée. Faites une rotation de 180 degrés à la page :



Elle est croissante majorée maintenant :

Nous donnerons plusieurs applications dans le chapitre 14 (il joue notamment un rôle fondamental pour trouver la forme de l'image d'un intervalle par une fonction monotone et continue).

Dans le cas où on se place sur un intervalle non ouvert, par exemple $[a\,;b]$, nous pouvons appliquer le théorème sur $]a\,;b[$ : $f$ admet une limite à gauche en $b$ et une limite à droite en $a$ (finies car $f$ est définie en $a$ et $b$ ... tout $c \in \,]a\,;b[$ c'est-à-dire qu'une fonction monotone admet une limite à gauche et une limite à droite finies en tout point intérieur.

Le $-$ à l'intérieur de $f$ transforme $]a\,;b[$ en $]-b\,;-a[$ et le $-$ à l'extérieur de $f$ transforme le sup en inf.

## IV Asymptotes

Officiellement cette notion n'apparaît qu'au second semestre. Nous donnons tout de même la définition car il serait dommage de s'en passer pour tracer des courbes représentatives. Nous verrons dans le chapitre 23 des outils pour déterminer des asymptotes.

**Définition (asymptotes).** *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.*

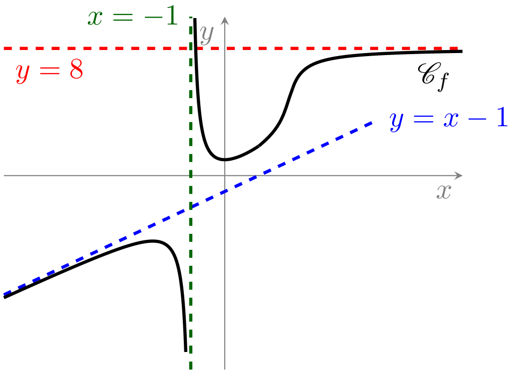
- *Soit $a \in \mathbb{R}\backslash I$ une extrémité de $I$. Si $f$ admet $\pm\infty$ pour limite en $a$, on dit que la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à $\mathscr{C}_f$ en $a$. On dit aussi que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote parallèle à l'axe des ordonnées en $a$.*
- *Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Si $I$ n'est pas majorée (respectivement minorée) et si*

$$\lim_{x\to+\infty} \big(f(x)-(ax+b)\big) = 0 \quad \left(\textit{respectivement} \quad \lim_{x\to-\infty} \big(f(x)-(ax+b)\big) = 0\right),$$

*on dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$).*

  - *Si $a \neq 0$, on parle d'asymptote oblique.*
  - *Si $a = 0$, on parle d'asymptote horizontale. On dit aussi que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote parallèle à l'axe des abscisses en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$).*

On peut également être amené à étudier la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à son asymptote. Pour cela on étudie le signe de $f(x) - ax - b$ pour $x$ au voisinage de $\pm\infty$. Si le signe est positif alors la courbe est au-dessus, sinon elle est en-dessous : cf. chapitre 23.




Dans l'exemple ci-contre, la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction $f$ admet :

- la droite d'équation $y = x - 1$ pour asymptote oblique en $-\infty$,
- la droite d'équation $y = 8$ pour asymptote horizontale en $+\infty$,
- la droite d'équation $x = -1$ pour asymptote verticale en $-1$.

**Remarque :** Comment trouver l'équation d'une asymptote oblique en $\pm\infty$ ? On calcule la limite (si elle existe) de $\dfrac{f(x)}{x}$ lorsque $x$ tend vers $\pm\infty$. Si elle converge vers $a \in \mathbb{R}$, alors on calcule la limite (si elle existe) de $f(x) - ax$ lorsque $x$ tend vers $\pm\infty$. Si elle converge vers $b \in \mathbb{R}$, alors on a trouvé l'équation de l'asymptote. On peut également effectuer un développement asymptotique : cf. chapitre 23.

## V Continuité en un point et limites de fonctions usuelles

### 1) Continuité en un point de fonctions usuelles

**Théorème.**

1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \longmapsto x^n$ est continue sur $\mathbb{R}$*
2. *Pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x^q}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.*
3. *Les fonctions polynomiales sont continues sur $\mathbb{R}$. Les fonctions rationnelles sont continues sur leur ensemble de définition.*
4. *La fonction $x \longmapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$.*
5. *Les fonctions $\cos$ et $\sin$ sont continues sur $\mathbb{R}$. La fonction $\tan$ est continue sur $\mathbb{R}\backslash\left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$.*
6. *La fonction $\exp$ est continue sur $\mathbb{R}$.*
7. *La fonction $\ln$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.*
8. *Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^*$, la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, si $\alpha > 0$, on peut la prolonger par continuité en $0$ en posant $0^\alpha = 0$.*

DÉMONSTRATION. 1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrons par récurrence sur $n$ que la fonction $f_n : x \longmapsto x^n$ est continue en $a$.

- Il est clair que les fonctions $x \longmapsto x^0$ et $x \longmapsto x$ sont continues en $a$ (prendre $\delta = \varepsilon$ dans la définition quantifiée). La propriété est donc vraie aux rangs $n = 0$ et $n = 1$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que la propriété est vraie au rang $n$, c'est-à-dire $f_n$ est continue en $a$. Alors la fonction $f_{n+1} = f_n f_1$ est continue en $a$ par produit. La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

D'où le résultat par récurrence.

2. Pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, notons $g_q : x \longmapsto \dfrac{1}{x^q}$. Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Puisque $f_q$ est continue en $a$ et que $f_q(a) \neq 0$, par quotient, $g_q = 1/f_q$ est continue en $a$.

3. Par somme de fonctions du type $x \longmapsto \lambda x^k$, $k \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (cf. point 1) pour les polynômes. Par quotient de deux polynômes (celui du dénominateur ne s'annule pas) pour les fonctions rationnelles.

4. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. Posons $\delta = \varepsilon$. On a

$$\forall x \in [a-\delta\,;a+\delta] \qquad ||x| - |a|| \leqslant |x-a| \leqslant \delta = \varepsilon.$$

Ainsi $x \longmapsto |x|$ est continue en $a$.

> Plus simplement, on peut encore montrer cela en disant que $x \xrightarrow[x\to a]{} a$ donc $|x| \xrightarrow[x\to a]{} |a|$ (cf. proposition sur les opérations algébriques).

5. On a montré dans le chapitre 6 que $|\sin(h)| \leqslant |h|$ pour tout $h \in \mathbb{R}$. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. Prenons $\delta = \varepsilon$. Pour tout $x \in [a-\delta\,;a+\delta]$, nous avons

$$|\sin(x) - \sin(a)| = \left|2\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)\right| \leqslant 2\left|\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)\right| \leqslant 2\left|\frac{x-a}{2}\right| \leqslant \varepsilon.$$

et

$$|\cos(x) - \cos(a)| = \left|-2\sin\left(\frac{x+a}{2}\right)\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)\right| \leqslant 2\left|\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)\right| \leqslant 2\left|\frac{x-a}{2}\right| \leqslant \varepsilon.$$

> On a utilisé des dérivées pour montrer cette inégalité (avec le sinus)... C'est l'objet du chapitre 15.

> Nous avons expliqué dans le chapitre 6, comment obtenir ces formules de trigonométrie à l'aide des formules d'addition.

Ainsi $\cos$ et $\sin$ sont continues en $a$. Comme $\cos$ ne s'annule en aucun point de $\mathbb{R}\backslash\left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$, par quotient $\tan = \dfrac{\sin}{\cos}$ est donc continue en tout point de $\mathbb{R}\backslash\left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$.

6. Découle du fait que $\exp$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (cf. chapitre 15).

> Car nous verrons qu'une fonction dérivable en un point est continue en ce point.

7. Découle du fait que $\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (cf. chapitre 15).
8. Montré dans le chapitre 6. $\square$

## 2) Limites de fonctions usuelles

**Théorème.**

1. *Si* $n \in \mathbb{N}^*$, *alors* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ *et* $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair,} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$
2. *Si* $n \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}$, *alors* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^n = 0$ *et* $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^n = 0$.
3. *Si* $n \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}$, *alors* $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^n = +\infty$ *et* $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair,} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$
4. *Si* $n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$, *alors* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$.
5. *Si* $P$ *est une fonction polynomiale de degré* $p$ *et de coefficient dominant* $a_p$, *alors elle possède les mêmes limites en* $\pm\infty$ *que la fonction* $x \longmapsto a_p x^p$.

6. *Si $P$ est une fonction polynomiale de degré $p$ et de coefficient dominant $a_p$, si $Q$ est une fonction polynomiale de degré $q$ et de coefficient dominant $b_q$, alors la fonction rationnelle $\dfrac{P}{Q}$ possède les mêmes limites en $\pm\infty$ que la fonction $x \longmapsto \dfrac{a_p}{b_q} x^{p-q}$.*
7. $\lim_{x\to+\infty} |x| = +\infty$ *et* $\lim_{x\to-\infty} |x| = +\infty$.
8. $\lim_{x\to(-\frac{\pi}{2})^+} \tan(x) = -\infty$ *et* $\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-} \tan(x) = +\infty$.
9. $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ *et* $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$.
10. $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ *et* $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$.
11. *Si* $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $x^\alpha \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ *et* $x^\alpha \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$.
*Si* $\alpha \in \mathbb{R}_-^*$, $x^\alpha \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ *et* $x^\alpha \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$.

L'autre limite s'obtient en utilisant le fait que $x \longmapsto x^n$ est paire (respectivement impaire) si $n$ est pair (respectivement impair).

Démonstration. 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A > 0$. Posons $B = \max(A^n, 1)$.
- Si $A \leqslant 1$ alors, pour tout $x \geqslant 1$, $x^n \geqslant 1 \geqslant A$.
- Si $A \geqslant 1$ alors, pour tout $x \geqslant A$, $x^n \geqslant A^n$.

Nous avons donc, pour tout $x \geqslant B$, $x^n \geqslant A$. Par conséquent $x^n \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

2. C'est une conséquence du point 1 puisque, si $n \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}$, alors $x \longmapsto x^n$ est l'inverse de $x \longmapsto x^{-n}$.
3. Soit $n \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}$. Comme $-n \in \mathbb{N}$, $x^{-n} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0^+$ (par continuité). Ainsi $x^n = \dfrac{1}{x^{-n}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$. L'autre limite découle d'un argument de parité.
4. Soit $A > 0$. Prenons $B = \sqrt[n]{A}$. Puisque la fonction $x \longmapsto \sqrt[n]{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, nous avons, pour tout $x \geqslant B$, $\sqrt[n]{x} \geqslant A$. Donc $\sqrt[n]{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.
5. Supposons que $P : x \longmapsto \sum_{k=0}^{p} a_k x^k$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $P(x) = a_p x^p f(x)$, avec $f(x) = 1 + \sum_{k=0}^{p-1} \dfrac{a_k}{a_p x^{p-k}}$. Puisque $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$, on obtient le résultat.
6. Supposons que $Q : x \longmapsto \sum_{k=0}^{q} b_k x^k$. Pour $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x|$ est assez grand, $Q(x) \neq 0$ et
$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_p x^p}{b_q x^q}\frac{f(x)}{g(x)}, \qquad \text{avec} \quad g(x) = 1 + \sum_{k=0}^{q-1} \frac{b_k}{b_q x^{q-k}}.$$
Puisque $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 1$, on obtient le résultat.
7. Par encadrement car $-x \leqslant |x| \leqslant x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
8. Ces deux limites découlent des limites suivantes : $\lim_{x\to(-\frac{\pi}{2})^+} \sin(x) = -1$,
$$\lim_{x\to(-\frac{\pi}{2})^+} \cos(x) = 0^+, \quad \lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-} \sin(x) = 1, \quad \lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-} \cos(x) = 0^+$$
(qui découlent de la continuité de $\cos$ et $\sin$ en $\pm\pi/2$).
9. Cf. chapitre 13.
10. Cf. chapitre 13.
11. Découle des deux précédentes, par composition. □

## 3) Croissances comparées

**Proposition.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0.$

On n'a pas le choix : il faut utiliser les dérivées (cf. chapitre 15).

Démonstration.

□

Les croissances comparées expriment le fait que « les exponentielles (termes du type $e^{bx}$, $b$ fixé, ou $q^x$, $q$ fixé) l'emportent sur les puissances (termes du type $x^a$, $a$ fixé) qui l'emportent elles-mêmes sur les puissances de logarithmes (termes du type $(\ln(x))^b$, $b$ fixé) ».

**Théorème (croissances comparées pour les fonctions).**

1. *Pour tous* $a > 0$, $b > 0$, $\dfrac{(\ln(x))^b}{x^a} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.
2. *Pour tous* $a > 0$, $b > 0$, $x^a|\ln(x)|^b \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$.
3. *Pour tous* $a > 0$ *et* $b > 0$, $\dfrac{x^a}{e^{bx}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

   *Pour tous* $a > 0$ *et* $b < 0$, $x^a e^{bx} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.
4. *Pour tous* $a > 0$ *et* $b > 0$, $|x|^a e^{bx} \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$.

Le point 3 se réécrit encore : $\dfrac{x^a}{q^x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ si $q > 1$ ou $x^a q^x \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ si $0 < q < 1$ (en prenant $b = \ln(q)$).

Démonstration.

$\square$

⚠ Ne pas voir des croissances comparées là où il n'y en a pas :

- S'il n'y a pas de forme indéterminée, il n'y a pas de croissances comparées. Par exemple $\dfrac{e^{-x}}{x^2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ n'est pas une croissance comparée. Il s'agit juste d'un produit de deux fonctions tendant vers $0$ en $+\infty$.
- Les croissances comparées ne font intervenir que des termes du type $e^{bx}$, $q^x$, $x^a$ ou $(\ln(x))^b$. Par exemple $\dfrac{\sin(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$ n'est pas une croissance comparée.

***Exemple :***

Enfin il existe beaucoup d'autres croissances comparées mais qui ne sont pas au programme. Il faudra alors systématiquement s'y ramener via un changement de variable.

On peut tout de suite se dire que l'exponentielle va l'emporter... par croissances comparées. Mais attention ce n'est pas directement une croissance comparée du cours. On s'y ramène en faisant un changement de variable.

**Remarque :** On obtient les deux croissances comparées du paragraphe IV.4 du chapitre 8 (dont nous avions laissé la preuve en suspens) à partir des croissances comparées ci-dessus et en utilisant le théorème du paragraphe II.1.a avec $u_n = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

## VI Fonctions négligeables, fonctions équivalentes

Dans cette partie, nous anticipons légèrement le chapitre d'analyse asymptotique du second semestre, comme nous l'avons déjà fait pour les suites dans le chapitre 8. Nous garderons les exemples difficiles et les subtilités pour le second semestre.

On se donne $D$ une union d'intervalles non vides, non réduits à un point et $a$ un élément ou une borne de $D$, éventuellement infinie. Soient $f$ et $g$ des fonctions définies sur $D$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui ne s'annulent pas au voisinage de $a$, sauf éventuellement en $a$ (par exemple, on pourra étudier la fonction sinus, qui ne s'annule pas au voisinage de $0$, sauf en $0$).

## 1) Fonctions négligeables

De même que pour les suites, si $f$ et $g$ tendent vers $\pm\infty$, $f(x) = \mathrm{o}(g(x))$ signifie que « $g$ tend vers $\pm\infty$ plus vite que $f$ » tandis que si $f$ et $g$ tendent vers $0$, $f(x) = \mathrm{o}(g(x))$ signifie que « $f$ tend vers $0$ plus vite que $g$ ».

**Définition.** *On dit que $f$ est négligeable devant $g$ au voisinage de $a$ si $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 0$. On note $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ ou $f(x) = o(g(x))$ si aucune confusion n'est possible.*

***Exemples :***

***Exemple :*** *Autre écriture des croissances comparées vues au premier semestre : pour tous $\alpha > 0$ et $\beta > 0$,*

- $\ln(x)^\beta \underset{x\to+\infty}{=} o(x^\alpha)$,
- $|\ln(x)|^\beta \underset{x\to0^+}{=} o\left(\dfrac{1}{x^\alpha}\right)$,
- $x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o\left(e^{\beta x}\right)$,
- $e^{-\beta x} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^\alpha}\right)$,
- $\dfrac{1}{x^\alpha} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{\ln(x)^\beta}\right)$,
- $e^{\beta x} \underset{x\to-\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{|x|^\alpha}\right)$.

⚠ Le petit o « dépend de l'endroit où on se trouve » : un petit o au voisinage de $+\infty$ ne sera plus forcément valable au voisinage de $0$, et réciproquement.

*Par exemple, si $\beta > \alpha > 0$, alors :*

— $\dfrac{1}{x^\beta} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^\alpha}\right)$ et $x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o\left(x^\beta\right)$

— $\dfrac{1}{x^\alpha} \underset{x\to0}{=} o\left(\dfrac{1}{x^\beta}\right)$ et $x^\beta \underset{x\to0}{=} o\left(x^\alpha\right)$.

## 2) Fonctions équivalentes

**Définition.** *On dit que $f$ et $g$ sont équivalentes au voisinage de $a$ si $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 1$. On note $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ ou $f(x) \sim g(x)$ si aucune confusion n'est possible.*

**Proposition.**

- $\sin(x) \underset{x\to0}{\sim} x$
- $\tan(x) \underset{x\to0}{\sim} x$
- $\ln(1+x) \underset{x\to0}{\sim} x$
- $e^x \underset{x\to0}{\sim} 1$
- $e^x - 1 \underset{x\to0}{\sim} x$
- $(1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to0}{\sim} \alpha x$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$, fixe
- $\cos(x) \underset{x\to0}{\sim} 1$
- $\cos(x) - 1 \underset{x\to0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}$

C'est la même démonstration que pour les suites.

Le fait que $u$ tend vers $0$ est une hypothèse indispensable !

**Proposition.** *Soit $u$ une fonction définie sur un voisinage d'un point $a$ (éventuellement infini) et telle que $u(t) \xrightarrow[t\to a]{} 0$. Alors*

- $\sin(u(t)) \underset{t\to a}{\sim} u(t)$
- $\tan(u(t)) \underset{t\to a}{\sim} u(t)$
- $\ln(1+u(t)) \underset{t\to a}{\sim} u(t)$
- $e^{u(t)} \underset{t\to a}{\sim} 1$
- $e^{u(t)} - 1 \underset{t\to a}{\sim} u(t)$
- $(1+u(t))^{\alpha} - 1 \underset{t\to a}{\sim} \alpha u(t)$

  *avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$, <u>fixe</u>*
- $\cos(u(t)) \underset{t\to a}{\sim} 1$
- $\cos(u(t)) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{u(t)^2}{2}$

**Proposition.** *Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $q < p$. Soient $a_q, \dots, a_p$ des réels tels que $a_q \neq 0$ et $a_q \neq 0$. Alors*

$$\sum_{k=q}^{p} a_k x^k \underset{x\to+\infty}{\sim} a_p x^p \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=q}^{p} a_k x^k \underset{x\to 0}{\sim} a_q x^q.$$

$\rightsquigarrow$ EXERCICE.

L'équivalent « dépend de l'endroit où on se trouve » : un équivalent au voisinage de $+\infty$ ne sera plus forcément valable au voisinage de $0$, et réciproquement.

***Exemples :***

## 3) Propriétés

**Les propriétés sont toutes identiques à celles pour les suites, avec $x \to a$ à la place de $n \to +\infty$, $f(x)$ à la place de $u_n$, etc. et en adaptant les démonstrations.**