Chapitre 11

Probabilités sur un univers fini

I Espaces probabilisés finis

1) Introduction

La théorie des probabilités consiste en la modélisation des phénomènes dans lesquels intervient le hasard.

Définition. *Une expérience aléatoire est une expérience renouvelable dont le résultat ne peut être prévu à l'avance et qui, renouvelée dans des conditions identiques, ne donne pas forcément le même résultat à chaque fois.*

Voici quelques exemples d'expériences aléatoires simples : lancer de dé, lancer de pièce, tirage de boules dans une urne, tirage d'une carte dans un jeu de cartes, etc. La théorie des probabilités est justement apparue historiquement pour étudier les jeux de hasard mais elle est désormais utilisée pour décrire des phénomènes trop complexes pour être analysés en détail (le hasard est donc une hypothèse simplificatrice).

Par exemple : l'écoulement dans un matériau poreux (percolation), le comportement des molécules dans un aimant (modèle d'Ising) ou dans un gaz, l'évolution d'une grande population de consommateur, l'évolution d'une espèce qui se reproduit, etc.

Mathématiquement, pour décrire une expérience aléatoire, on se donne :

- Un ensemble Ω non vide, appelé univers, qui contient toutes les résultats possibles.

  Pour le lancer de dé, on se donne $\Omega = [\![1\,;6]\!]$. Pour le lancer de pièce, on se donne $\Omega = \{P; F\}$.

- Un ensemble de phénomènes, appelés événements, qui peuvent se produire ou ne pas se produire lors de l'expérience. Un événement est décrit par une partie de Ω (généralement l'ensemble des résultats de l'expérience menant à la réalisation de ce phénomène)

  Si on lance un dé, alors l'événement « obtenir un chiffre pair » est décrit par la partie $\{2; 4; 6\}$. Si le dé tombe sur 2, 4 ou 6, alors cet événement est réalisé.

- Une fonction qui à tout événement associe la probabilité d'occurrence de A, c'est-à-dire un réel de $[0\,;1]$ qui représente la chance que A soit réalisé.

  Si le dé est bien équilibré, alors on peut prendre la fonction, qui à l'événement « obtenir la face numérotée k » associe $1/6$ pour tout $k \in [\![1\,;6]\!]$.

En général on définit les événements à l'aide de phrases et on ne cherche pas à les décrire mathématiquement.

Nous allons à présent définir les notions d'univers, d'événements et de probabilités proprement.

2) Espaces probabilisables finis

Pour le moment nous nous limitons aux univers finis, c'est-à-dire aux expériences aléatoires n'ayant qu'un nombre fini de résultats possibles. Nous verrons le cas général au chapitre 28.

Définition. *On appelle espace probabilisable fini la donnée du couple $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ où Ω est un ensemble fini non vide appelé univers (des possibles). C'est l'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire.*
Les éléments de Ω sont appelées les éventualités ou les issues de l'expérience aléatoire.

Un élément $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ est appelé événement. On dit qu'il est réalisé si le résultat de l'expérience est un élément de A.

Si $\omega \in \Omega$, le singleton $\{\omega\}$ est appelé événement élémentaire.

L'événement $\varnothing$ est l'événement impossible. L'événement Ω est l'événement certain.

Pour le moment, on ne parle pas encore de probabilités mais seulement de considérations ensemblistes afin de décrire des phénomènes.

A part dans les situations dites « d'équiprobabilité » (cf. paragraphe I.5.b), on construit rarement l'univers Ω. En général Ω est de toute façon trop compliqué pour être décrit mathématiquement et la plupart des énoncés se contentent d'admettre qu'il existe un univers décrivant l'expérience étudiée.

Exemples :

- *Si on lance n dés successivement (avec $n \in \mathbb{N}^*$), alors*

- *Si on tire simultanément p boules dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n (avec p et n des entiers tels que $0 \leqslant p \leqslant n$), alors*

- *Si cette fois on tire les boules successivement et sans remise, alors*

Dans le dernier exemple, comme dans le chapitre 10, on se demande si l'ordre compte et si on peut avoir plusieurs fois le même élément.

Il se peut que l'ensemble Ω des résultats possibles d'une expérience aléatoire soit un ensemble infini.

> *Par exemple l'ensemble des résultats possibles de l'expérience consistant à compter le nombre de lancers de pièce nécessaires pour obtenir un Pile est $\mathbb{N}^*$.*

Dans ce cas, nous verrons que certaines parties de Ω ne pourront pas être considérées comme des événements (il ne sera pas possible de définir correctement leur probabilité) et nous devrons préciser l'ensemble $\mathcal{A}$ des événements que l'on peut observer. Ainsi, en général, un espace probabilisable est la donnée d'un couple $(\Omega, \mathcal{A})$ où $\mathcal{A} \subset \mathscr{P}(\Omega)$ est appelé l'algèbre des événements. Dans ce chapitre, nous nous limitons au cas où Ω est fini : il sera alors toujours possible de prendre $\mathcal{A} = \mathscr{P}(\Omega)$. Le cas général sera traité au chapitre 28.

Nous verrons au second semestre que l'ensemble $\mathcal{A}$ doit vérifier certaines propriétés.

Une fois l'espace probabilisable fini $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ introduit, on dresse en général une liste d'événements « simples ».

« simple » au sens où l'on arrive facilement à calculer leur probabilité.

Exemples :

Réflexe en début d'exercice de probabilités : définir des événements (tous ceux auxquels on peut penser, mieux vaut trop que pas assez !).

3) Opérations sur les événements

L'étape suivante est de décrire les événements qui nous intéressent en fonction des événements « simples » que l'on vient d'introduire, à l'aide d'opérations ensemblistes :

Puisque les événements sont des parties de Ω, toutes les opérations vues dans le chapitre 9 sont valables pour les événements. Seul le vocabulaire change.

Définition. *Soient A et B des événements.*

- *L'événement $\overline{A} = \complement_\Omega A$ est réalisé si A ne l'est pas. On dit qu'il s'agit de l'événement contraire de A.*
- *La relation $A \subset B$ signifie que la réalisation de l'événement A implique celle de l'événement B.*
- *L'événement $A \cup B$ est réalisé si l'un au moins des événements A et B est réalisé.*
- *L'événement $A \cap B$ est réalisé si les événements A et B sont tous les deux réalisés.*
- *L'événement $A \backslash B$ est réalisé si l'événement A est réalisé mais pas l'événement B.*
- *Si $A \cap B = \varnothing$, les événements A et B sont dits incompatibles ou disjoints.*

Tout simplement, deux événements sont incompatibles s'ils ne peuvent se produire en méme temps.

Exemple : *On dispose d'un jeu de 52 cartes. On tire trois cartes successivement et avec remise. On peut travailler avec l'univers* $\boxed{}$ *où*

$$E = \{A\clubsuit; K\clubsuit; Q\clubsuit; J\clubsuit; \dots; A\spadesuit; K\spadesuit; \dots; A\diamondsuit; K\diamondsuit; \dots; A\heartsuit; K\heartsuit; \dots; 3\heartsuit; 2\heartsuit\}.$$

Pour $i \in \{1; 2; 3\}$, notons A_i l'événement « obtenir $\spadesuit$ au $i^{\text{ième}}$ tirage ». L'événement

- *« obtenir un $\clubsuit$, $\diamondsuit$ ou $\heartsuit$ au premier tirage » est* $\boxed{}$
- *« obtenir $\spadesuit$ aux deux premiers tirages mais pas au troisième » est* $\boxed{}$
- *« obtenir $\spadesuit$ aux deux premiers tirages » est* $\boxed{}$
- *« obtenir au moins un $\spadesuit$ » est* $\boxed{}$
- *« ne pas obtenir de $\spadesuit$ » est* $\boxed{}$
- *« obtenir exactement deux $\spadesuit$ » est* $\boxed{}$

Notons B_1 l'événement « obtenir une carte de couleur noire au premier tirage ».
Nous avons $A_1 \subset B_1$: si l'événement A_1 est réalisé, alors l'événement B_1 aussi.
Les événements « obtenir une paire » et « les trois cartes sont des $\heartsuit$ » sont incompatibles.

Également aux familles dénombrables (i.e. les familles indexées par une partie infinie de $\mathbb{N}$) d'événements. Mais il n'y a qu'un nombre fini d'événements, donc ces unions et intersections sont en fait finies.

Ces notions se généralisent à des familles finies d'événements : si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille d'événements de Ω, indexée par une partie finie I de $\mathbb{N}$, alors

- $\bigcup_{i \in I} A_i$ est l'événement « au moins l'un des A_i, $i \in I$, est réalisé »,
- $\bigcap_{i \in I} A_i$ est l'événement « tous les A_i, $i \in I$, sont réalisés »,
- $\bigcap_{i \in I} \overline{A_i}$ est l'événement « aucun des A_i, $i \in I$, n'est réalisé ».

Exemple : *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance n fois successivement une pièce de monnaie. Un univers associé à cette expérience est $\Omega = \{P; F\}^n$. Pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, notons A_k l'événement « obtenir Pile au $k^{\text{ième}}$ lancer ».*

- *L'événement « n'obtenir que des faces » est* $\boxed{}$
- *Pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, posons B_k : « obtenir Pile pour la première fois au $k^{\text{ième}}$ lancer ». On a*

$$\boxed{}$$

4) Système complet d'événements

Certaines familles d'événements ont la particularité de « partitionner » l'ensemble Ω, c'est-à-dire de découper Ω en plusieurs sous ensembles incompatibles. Dans ce cas, toute issue ω de l'expérience appartient nécessairement à l'un des événement de la famille et un seul. Ce type de famille est appelé « système complet d'événements ».

La notion de système complet d'événements est ensembliste et non probabiliste. C'est pourquoi nous la définissons dans ce paragraphe. Elle peut sembler abstraite au premier abord mais elle est essentielle puisqu'elle intervient dans la formule la plus importante du chapitre : la formule des probabilités totales.

Définition (système complet d'événements). *Soit I une partie finie de $\mathbb{N}$ et soit Ω un univers fini. Une famille $(A_i)_{i\in I}$ d'événements de Ω est un système complet (fini) d'événements si elle vérifie :*

- $\Omega = \bigcup_{i\in I} A_i$,
- *Les événements de la famille sont incompatibles deux à deux, c'est-à-dire*

$$\forall (i,j) \in I^2, \qquad i \neq j \qquad \Longrightarrow \qquad A_i \cap A_j = \varnothing.$$

Exemples :

Il suffit de se poser les deux questions très simples suivantes :
- Est-on dans au moins un des cas de figure ?
- Peut-on être dans plusieurs cas de figure différents en même temps ?

Si on est au moins dans un des cas des figure, et si deux cas de figure ne peuvent pas se produire en même temps, alors les différents cas de figure forment un système complet d'événements. Voir les exemples ci-contre.

- *On lance successivement n pièces de monnaie et on pose, pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, A_k : « obtenir Pile au $k^{\text{ième}}$ lancer » et B_k : « on obtient le premier Pile au $k^{\text{ième}}$ lancer »*
  - *La famille $(A_1,\dots,A_n)$ n'est pas un système complet d'événements. En effet, on peut tout à fait obtenir Pile aux deux premiers lancers si bien que $A_1 \cap A_2 \neq \varnothing$.*
  - *La famille $(B_1,\dots,B_n)$ n'est pas un système complet d'événements. Ici les événements sont bien deux à deux incompatibles mais leur union est « obtenir au moins un Pile », ce qui n'est pas égal à Ω.*
  - *Si on pose B_0 : « n'obtenir aucun Pile » , alors $(B_0,B_1,\dots,B_n)$ est un système complet d'événements.*

5) Probabilités sur un espace probabilisable fini

a) Définition et premières propriétés

Intuitivement, une probabilité est une fonction qui à tout événement associe sa probabilité d'occurrence, c'est-à-dire un réel de $[0\,;1]$ qui représente la chance qu'il a de se réaliser.

Définition. *Soit $(\Omega,\mathscr{P}(\Omega))$ un espace probabilisable fini. On appelle probabilité sur $(\Omega,\mathscr{P}(\Omega))$ toute application $\mathbb{P} : \mathscr{P}(\Omega) \longrightarrow [0\,;1]$ telle que :*

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,
2. *$\mathbb{P}$ est additive : si A et B sont deux événements incompatibles, alors*

$$\mathbb{P}(A\cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$

On dit alors que $(\Omega,\mathscr{P}(\Omega),\mathbb{P})$ est un espace probabilisé fini.

Il y a donc quatre points à vérifier :
- $\mathbb{P}$ est définie sur $\mathscr{P}(\Omega)$.
- Pour tout $A \in \mathscr{P}(\Omega)$,

$$\mathbb{P}(A) \in [0\,;1]\,,$$

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,
- $\mathbb{P}$ est additive.

Mais dans la pratique, on ne vérifie jamais ces quatre points (cf. paragraphe suivant).

⚠ $\mathbb{P}$ est définie sur $\mathscr{P}(\Omega)$ et non sur sur Ω. Notamment, si $\omega \in \Omega$, alors $\mathbb{P}(\omega)$ n'a pas de sens. En toute rigueur il s'agirait plutôt de $\mathbb{P}(\{\omega\})$.

Dans la suite de ce chapitre, on se donne un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$.

Proposition. *On a* $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$.

DÉMONSTRATION.

□

Par récurrence, on obtient :

Proposition (additivité finie). *Si $A_1, \ldots, A_n$ sont des événements deux à deux incompatibles, alors*

↝ EXERCICE.

On verra dans le paragraphe I.5.c que, puisque la somme de ces six probabilités est égale à 1, on peut bien construire un espace probabilisé qui modélise cette expérience

Exemple : *On lance un dé truqué de telle sorte que les probabilités de tomber sur* $1, 2, 3, 4, 5, 6$ *sont respectivement* $1/12, 1/6, 1/4, 1/12, 1/3, 1/12$. *Pour tout* $k \in [\![1\,;6]\!]$, *posons* A_k *: « tomber sur la* $k^{\text{ième}}$ *face ». Ces six événements sont deux à deux incompatibles. Ainsi la probabilité de tomber sur un chiffre impair est*

En fait il suffit de vérifier qu'une probabilité est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ (au lieu de $[0\,;1]$) dans la définition d'une probabilité puisque, si A est un événement, $1 - \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\overline{A}) \geqslant 0$ et donc $\mathbb{P}(A) \leqslant 1$.

Proposition. *Soient A, B et C des événements. Nous avons :*

1. $\mathbb{P}(B \backslash A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
2. $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
3. *Si* $A \subset B$, *alors* $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$.
4. *(formule de Poincaré pour deux événements)*
$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$
5. *(formule de Poincaré pour trois événements)*
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) \\ - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C).\end{aligned}$$

DÉMONSTRATION.

$\square$

Nous verrons dans le prochain paragraphe (consacré aux situations d'équiprobabilité) que l'on peut construire un espace probabilisé fini modélisant cette expérience tel que la probabilité d'obtenir un pique est $\frac{13}{52}=\frac{1}{4}$, la probabilité d'obtenir un roi est $\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$ et la probabilité de tirer le roi de pique est $\frac{1}{52}$.

Exemple : *On tire une carte au hasard dans un jeu de 52 cartes. Quelle est la probabilité que la carte ne soit ni un roi ni un coeur ?*

La formule des probabilités totales permet en quelque sorte de faire une disjonction de cas dont la réalisation est aléatoire : pour calculer la probabilité de B, on calcule la probabilité que B a lieu en même temps que A_k pour chaque $k \in [\![1\,;n]\!]$, puis on somme les probabilités obtenues.

Proposition (formule des probabilités totales – première version). *Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$. Si $(A_1,\ldots,A_n)$ est un système complet fini d'événements, alors*

DÉMONSTRATION.

$\square$

L'énoncé nous dit donc que $\mathbb{P}(A)=0,31$, $\mathbb{P}(B)=0,35$, $\mathbb{P}(C)=0,23$ et $\mathbb{P}(D)=0,11$.

Exemple : *Un restaurateur propose une formule laissant à ses clients l'un des quatre choix suivants : entrée/plat (événement A), entrée/plat/dessert (événement B), plat/dessert (événement C) ou bien seulement le plat (événement D). Une étude statistique préalable a révélé que les pourcentages de client faisant ces choix sont respectivement 31%, 35%, 23% et 11%. Quelle est la probabilité qu'un client prenne une entrée ?*

Attention, la réciproque est fausse !

Corollaire. *Si* $(A_1, \dots, A_n)$ *est un système complet d'événements,* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) = 1$.

Démonstration. On prend $B = \Omega$ dans la proposition précédente. □

Ce que l'on résume grossièrement par : la somme des probabilités vaut 1.

Corollaire. *Supposons que* $\Omega = \{\omega_1; \dots; \omega_n\}$ *avec* $n = \operatorname{card}(\Omega) \in \mathbb{N}^*$. *Alors, pour tout événement* A, *on a*

En particulier $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\{\omega_k\}) = 1$.

Ainsi une probabilité $\mathbb{P}$ *définie sur un espace probabilisable fini est entièrement déterminée par la donnée des probabilités de chaque événement élémentaire de* Ω.

Démonstration. On applique la proposition précédente avec le système complet d'événements $(\{\omega_k\})_{1 \leqslant k \leqslant n}$. □

b) Construction de probabilités

Théorème. *Supposons que* $\Omega = \{\omega_1; \dots; \omega_n\}$ *avec* $n = \operatorname{card}(\Omega)$. *Soient* $p_1, \dots, p_n$ *des réels positifs tels que* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$. *Il existe alors une unique probabilité sur* $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ *telle que, pour tout* $k \in [\![1\,;n]\!]$, $\mathbb{P}(\{\omega_k\}) = p_k$.

Démonstration. Définissons $\mathbb{P} : A \in \mathscr{P}(\Omega) \longmapsto \displaystyle\sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ \omega_k \in A}} p_k$.

- Il s'agit bien d'une application sur $\mathscr{P}(\Omega)$.
- On a $\mathbb{P}(\Omega) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$.
- Soit A un événement. Comme $p_1, \dots, p_n$ sont positifs, $0 \leqslant \mathbb{P}(A) \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$.
- Donnons-nous A et B deux événements disjoints, alors

Ici on a utilisé la propriété de sommation par paquet puisque

$$A \cap B = \varnothing.$$

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ \omega_k \in A \cup B}} p_k = \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ \omega_k \in A}} p_k + \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ \omega_k \in B}} p_k = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

Ainsi $\mathbb{P}$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$. L'unicité est garantie par le corollaire précédent. □

Exemple : *On lance un dé truqué tel que chaque face a une probabilité de tomber qui est proportionnelle au numéro de la face. Modélisons cela par un espace probabilisé.*

c) Équiprobabilité

Proposition. *Sur tout espace probabilisable fini $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$, il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ prenant la même valeur sur les événements élémentaires. On appelle cette probabilité la probabilité uniforme (ou équiprobabilité) sur Ω. Nous avons*

$$\forall A \in \mathscr{P}(\Omega), \qquad \mathbb{P}(A) = \frac{\operatorname{card}(A)}{\operatorname{card}(\Omega)}.$$

En particulier, pour tout $\omega \in \Omega$,

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{\operatorname{card}(\Omega)}.$$

DÉMONSTRATION.

$\square$

Remarques :

- Munir un espace probabilisable de la probabilité uniforme permet de modéliser une expérience aléatoire pour laquelle tous les évènements élémentaires ont la même chance de réalisation. On dit que les évènements élémentaires sont équiprobables. C'est l'hypothèse que l'on fera pour des lancers de dés ou de pièces non truqués (ou équilibrés), des tirages de cartes ou de boules numérotées dans un urne, etc.
- Dans le cas de l'équiprobabilité, on a $\mathbb{P}(A) =$ « $\dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre total de cas}}$ ».

Exemples :

- *On lance deux fois un dé équilibré à six faces.*

- *Un grand classique : le problème des anniversaires. Quelle est la probabilité que, dans une classe de n élèves (avec $n \in [\![2\,;365]\!]$), au moins deux partagent la même date d'anniversaire ?*

  Pour simplifier, on suppose qu'aucun élève n'est né un 29 février. On numérote les jours de l'année de 1 à 365 et les élèves de 1 à n.

Si $n > 365$, il est sûr qu'au moins deux élèves partagent la même date d'anniversaire (car sinon 366 élèves auraient une date de anniversaire différente).

D'accord ce n'est pas très réaliste, mais c'est pour simplifier les calculs.

On suppose que les jours de naissance sont répartis de façons équiprobables dans l'année

On calcule facilement ce produit à l'aide de Python. On trouve par exemple que, dans une classe de 23 élèves, il y a plus d'une chance sur deux qu'au moins deux élèves partagent la même date de naissance. Dans une classe de 41 élèves, cette probabilité dépasse 90%.

Remarque : Nous l'avons déjà dit mais en général Ω est bien trop compliqué pour être décrit mathématiquement et la plupart des énoncés se contentent d'admettre qu'il existe un univers décrivant l'expérience étudiée (voire ne disent rien du tout). Si on ne connait pas précisément Ω, on ne risque pas de savoir construire rigoureusement une probabilité qui modélise l'expérience, y compris en situation d'équiprobabilité : si on ne connaît pas le cardinal de Ω, on ne peut pas utiliser la formule « $\dfrac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$ ». Parfois seule une petite partie de l'expérience présente une situation d'équiprobabilité.

Si l'énoncé ne demande pas clairement de construire un espace probabilisé, ne vous y risquez pas !

De la formule « $\dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre total de cas}}$ » dans un cas d'équiprobabilité, on retient néanmoins le principe suivant :

> Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $a \in [\![1\,;N]\!]$. Considérons N objets distincts dont un nombre a d'entre eux vérifient une caractéristique C. Si on choisit au hasard (de façon équiprobable) un objet parmi ces N objets, alors la probabilité que l'objet tiré possède la caractéristique C est $\dfrac{a}{N}$.

6) Utilisation de Python

Nous reviendrons plus longuement sur le concept de simulation dans le prochain chapitre, consacré aux variables aléatoires.

Pour faire des simulations de phénomènes aléatoires avec Python, on commence par importer la bibliothèque `numpy.random` avec la commande

```
import numpy.random as rd
```

Soient a et b des entiers tels que $a < b$. Soit $p \in \,]0\,;1[$. Supposons que a, b, p sont implémentés en Python par les variables `a,b,p`. Nous admettons que :

- la commande `rd.randint(a,b+1)` renvoie un entier de $[\![a\,;b]\!]$ choisi uniformément, c'est-à-dire, pour tout $\omega \in [\![a\,;b]\!]$, la probabilité de $\{\omega\}$ est $\dfrac{1}{b-a+1}$.
- la commande **`rd.randint(1,b+1)<=a`** renvoie `True` avec probabilité $\frac{a}{b}$ et `False` avec probabilité $1-\frac{a}{b}$.

Si $n \in \mathbb{N}^*$ est implenté en Python par `n`, alors `rd.randint(n)` renvoie un entier de $[\![0\,;n-1]\!]$.

- plus généralement, la commande **rd.random()<p** renvoie `True` avec probabilité p et `False` avec probabilité $1-p$.

`rd.random()` renvoie un nombre uniformément choisi entre 0 et 1. Pour comprendre bien cela, rendez-vous en deuxième année.

Nous verrons en TD comment faire si on veut construire en Python une probabilité non uniforme sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$.

Exemples :

- *La commande* `rd.randint(1,7)` *renvoie le résultat d'un lancer de dé équilibré.*
- *Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, alors on on peut coder Ω par une liste Python* `L` *en lisant simplement les éléments de Ω. La commande* `len(L)` *renvoie la longueur de la liste (n ici) donc la commande* `rd.randint(len(L))` *choisit uniformément une coordonnée de* `L`*. Par conséquent* `L[rd.randint(len(L))]` *choisit uniformément un élément de* `L`*, c'est-à-dire un élément de Ω.*
- *La fonction suivante prend en entrée deux entiers naturels non nuls r et b, simule le tirage d'une boule dans une urne contenant r boules rouges et b boules bleues et affiche* `Rouge` *ou* `Bleu` *selon la couleur obtenue.*

Autre possibilité :

C'est comme si on numérotait les boules rouges de 1 à r et les boules bleues de $r+1$ à $r+b$.

- *On dispose d'une urne U contenant 4 boules rouges et 6 boules bleues ainsi que d'une urne V contenant 5 boules rouges et 2 boules bleues. On tire une boule dans l'urne U (de façon équiprobable) et, sans la regarder on la met dans l'urne V. On tire ensuite une boule dans l'urne V (de façon équiprobable). Voici une fonction sans argument qui affiche la couleur obtenue à la fin :*

- *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dispose de n pièces de monnaie truquées de telle sorte que, pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, la $k^{\text{ième}}$ pièce a une probabilité $\dfrac{k}{n}$ de tomber sur Pile. On choisit une pièce au hasard et on la lance. Écrire une fonction en Python qui prend en argument d'entrée n et qui renvoie* `True` *si la pièce lancée tombe sur Pile et False sinon.*

Lisez bien : `Renvoie` et non pas *affiche* !

II Probabilité conditionnelle

1) Définition

On peut aussi voir que, si on sait que A est réalisé, alors on se concentre sur les cas où A est réalisé, et on cherche (parmi ces cas uniquement) ceux où B est réalisé. On divise donc $\mathbb{P}(A\cap B)$ (cas où B et A sont réalisés) par $\mathbb{P}(A)$ (on se concentre sur les cas où A est réalisé).

Commençons par un exemple pour motiver cette notion. Si on lance un dé équilibré à 6 faces, sachant que le chiffre obtenu est pair, alors la probabilité d'obtenir un nombre inférieur ou égal à 5 n'est plus $5/6$ mais $2/3$ (car on sait que seuls trois résultats sont possibles : 2, 4 ou 6). Notons A l'événement « obtenir un chiffre pair » et B l'événement « obtenir un chiffre inférieur ou égal à 5 ». Puisque l'on est dans une situation d'équiprobabilité, on a

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}, \qquad \mathbb{P}(B) = \frac{5}{6} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(A\cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Remarquons que la probabilité de B sachant que A est réalisé est $\dfrac{2}{3} = \dfrac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A)}$.

Définition. *Soient A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(A) \neq 0$. On appelle probabilité conditionnelle de B sachant A le réel*

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

On la note aussi $\mathbb{P}(B|A)$.

Souvent on connaît $\mathbb{P}_A(B)$ et pas $\mathbb{P}(A\cap B)$. Il ne faut surtout pas les confondre :
- $\mathbb{P}(A\cap B)$ est la probabilité que A et B soient réalisés en même temps.
- $\mathbb{P}_A(B)$ est la probabilité de B quand on sait que A est réalisé.

Le nombre $\mathbb{P}_A(B)$ représente la probabilité de B calculée du point de vue d'un observateur qui arriverait en cours d'expérience au moment où A vient de se réaliser. Il dispose de plus d'informations qu'un observateur qui assiste à l'expérience depuis son début : pour lui « l'univers devient A ».

Proposition. *Soit A un événement de probabilité non nulle. L'application*

$$P_A : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(\Omega) & \longrightarrow & [0,1] \\ B & \longmapsto & \mathbb{P}_A(B) \end{array} \right.$$

est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$.

Démonstration. Nous avons déjà vu que, pour tout $B \in \mathscr{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}_A(B) \in [0,1]$.

- $\mathbb{P}_A$ est bien une application sur $\mathscr{P}(\Omega)$.
- Puisque $A\cap B \subset A$, nous avons $\mathbb{P}(A\cap B) \leqslant \mathbb{P}(A)$ et donc $\mathbb{P}_A(B) \in [0,1]$.
- $\mathbb{P}_A(\Omega) = \dfrac{\mathbb{P}(A\cap\Omega)}{\mathbb{P}(A)} = \dfrac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A)} = 1.$
- Soient B et C deux événements incompatibles. Alors

$$\mathbb{P}_A(B\cup C) = \frac{\mathbb{P}(A\cap(B\cup C))}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A\cap B) + \mathbb{P}(A\cap C)}{\mathbb{P}(A)},$$

  car $A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$ et $(A\cap B)\cap(A\cap C) = A\cap B\cap C = A\cap\varnothing = \varnothing$. Nous en déduisons que $\mathbb{P}_A(B\cup C) = \mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}_A(C)$.

L'application $\mathbb{P}_A$ est bien une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$. $\square$

Plus généralement, si B est un événement tel que $A \subset B$, alors $\mathbb{P}_A(B) = 1$. En particulier $\mathbb{P}_A(A) = 1$.

Puisque $\mathbb{P}_A$ est une probabilité, elle vérifie toutes les propriétés vues dans la paragraphe I.5, notamment :
- Si B est un événement, alors
$$\mathbb{P}_A(\overline{B}) = 1 - \mathbb{P}_A(B).$$
- (formule de Poincaré) Si B et C sont des événements, alors
$$\mathbb{P}_A(B\cup C) = \mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}_A(C) - \mathbb{P}_A(B\cap C).$$

2) Formule des probabilités composées

Généralement il est plus facile de déterminer la probabilité conditionnelle que de déterminer la probabilité d'une intersection. Si A et B sont des événements tels que $\mathbb{P}(A) \neq 0$, alors

$$\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B).$$

Voici une formule qui généralise cela à l'intersection d'un nombre fini d'événements.

Cadre d'utilisation : on utilise cette formule pour calculer la probabilité d'une intersection d'événements qui ne sont pas indépendants (cf. paragraphe III), typiquement quand on procède à des tirages et quand la composition de l'urne change à chaque étape : voir l'exemple ci-dessous.

Théorème (formule des probabilités composées). *Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$. Soient $A_1, \dots, A_n$ des événements tels que $\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) \neq 0$. Alors*

Démonstration.

□

Attention, il n'y a aucune notion de temporalité quand on manie des probabilités conditionnelles. Par exemple, on peut calculer $P_{B_2}(B_1)$! On peut calculer une probabilité conditionnelle d'un événement, sachant un événement qui se produit après celui-ci.

Exemples :

- *On considère une urne qui contient 10 boules dont 6 rouges et 4 bleues. On tire successivement 3 boules avec les règles suivantes :*
  - *Si on tire une boule rouge, alors on l'enlève.*
  - *Si on tire une boule bleue, on la remplace par une boule rouge.*

  Quelle est la probabilité de tirer une boule bleue, une boule rouge puis une boule bleue (dans cet ordre) ?

Il n'y a aucune notion d'indépendance (cf. paragraphe III) dans cet exemple car la composition de l'urne à une étape dépend des boules tirées lors des étapes précédentes.

- *On dispose d'un jeu de 52 cartes. On tire des cartes successivement et sans remise jusqu'à ce que l'on obtienne un trèfle. Soit $k \in [\![1\,;39]\!]$. Quelle est la probabilité de réaliser k tirages ?*

Forcément, vu qu'il y a 13 trèfles, on va finir par en obtenir un en moins de 39 tirages.

Là aussi, pas d'indépendance car on retire au fur et à mesure des cartes du jeu.

On aurait aussi pu utiliser un argument de combinatoire mais c'est moins dans l'esprit du programme.

3) Formule des probabilités totales

Cadre d'utilisation : il y a plusieurs cas particuliers, et dans chaque cas particulier on sait répondre. Voir les exemples dans la suite.

Théorème (formule des probabilités totales). *Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$. Soit $(A_1, \dots, A_n)$ un système complet d'événements tels que, pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, $\mathbb{P}(A_k) \neq 0$. Alors, pour tout événement B,*

DÉMONSTRATION.

□

Il faut absolument appliquer cette formule à une famille $(A_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ qui est un système complet d'événements. Tous les indices $k \in [\![1\,;n]\!]$ doivent figurer dans la somme, même si $\mathbb{P}_{A_k}(B) = 0$. C'est seulement dans un second temps que l'on peut enlever les termes nuls de la somme.

Remarques :

- La formule des probabilités totales permet en quelque sorte de faire une disjonction de cas dont la réalisation est aléatoire. Supposons que l'on connaisse la probabilité de B dans le cas où on a obtenu A_1 (i.e. $\mathbb{P}_{A_1}(B)$), la probabilité de B dans le cas où on a obtenu A_2 (i.e. $\mathbb{P}_{A_2}(B)$), etc. et enfin la probabilité de B dans le cas où on a obtenu A_n (i.e. $\mathbb{P}_{A_n}(B)$). Si les n cas sont disjoints et couvrent l'ensemble des possibilités (autrement dit si $(A_1, \dots, A_n)$ est un système complet d'événements), alors la probabilité de B est obtenue via la formule des probabilités totales.
- Il est parfois compliqué de déterminer si, pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, $\mathbb{P}(A_k) \neq 0$ (hypothèse indispensable si on veut que le terme $\mathbb{P}_{A_k}(B)$ soit défini). Une convention usuelle est, lorsque $k \in [\![1\,;n]\!]$ est tel que $\mathbb{P}(A_k) = 0$, d'attribuer à $\mathbb{P}_{A_k}(B)$ une valeur arbitraire entre 0 et 1. Le terme $\mathbb{P}_{A_k}(B)\mathbb{P}(A_k)$ a alors un sens et il n'entraînera

pas d'erreur dans la formule des probabilités totales car il n'apparaît pas réellement dans la somme (en effet il est nul et rappelons qu'il est issu du terme $\mathbb{P}(B \cap A_k)$, qui est lui-même nul puisque $B \cap A_k \subset A_k$).

Retenons aussi le cas particulier d'un système complet de deux événements :

Théorème (formule des probabilités totales). *Soit A un événement tel que $\mathbb{P}(A) \in]0\,;1[$. Pour tout événement B, nous avons*

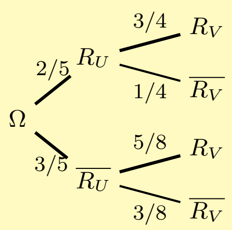
$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}_{\overline{A}}(B).$$

Si on sait quelle boule on a tirée dans l'urne U alors on connaît la composition de l'urne V et donc c'est trivial : il y a plusieurs cas particuliers, et dans chaque cas particulier on sait répondre. On pense donc à la formule des probabilités totales.

Exemples :

- *On dispose d'une urne U contenant 4 boules rouges et 6 boules bleues ainsi que d'une urne V contenant 5 boules rouges et 2 boules bleues. On tire une boule dans l'urne U (de façon équiprobable) et, sans la regarder on la met dans l'urne V. On tire ensuite une boule dans l'urne V (de façon équiprobable). Quelle est la probabilité qu'elle soit rouge ?*

Au lycée, pour traiter cet exemple, on aurait rédigé ainsi :



Pour obtenir la probabilité de R_V, on aurait ajouté les probabilités des chemins menant à R_V, la probabilité d'un chemin étant obtenue en multipliant entre elles les probabilités conditionnelles placées sur les arêtes du chemin. Cette règle de calcul n'est rien d'autre que la formule des probabilités totales en moins rigoureux. Désormais on ARRÊTE de raisonner avec des arbres et on rédige avec des formules.

- *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dispose de n pièces de monnaie truquées de telle sorte que, pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, la $k^{\text{ième}}$ pièce a une probabilité $\dfrac{k}{n}$ de tomber sur Pile. On choisit une pièce au hasard et on la lance. Quelle est la probabilité d'obtenir Face ?*

4) Formule de Bayes

Dans l'exemple ci-dessus, on pense à la formule des probabilités totales car, si on sait quelle pièce on a tirée, alors c'est trivial : il y a plusieurs cas particuliers, et dans chaque cas particulier on sait répondre.

Théorème (formule de Bayes). *Soient A et B deux événements qui sont tous les deux de probabilité non nulle. Alors*

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(B)\mathbb{P}_B(A)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Démonstration. On a $\mathbb{P}_A(B)\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B \cap A) = \mathbb{P}_B(A)\mathbb{P}(B)$. □

Exemples :

- *Reprenons l'exemple du paragraphe précédent avec les urnes U et V. On vient d'obtenir une boule rouge. Quelle est la probabilité que la boule tirée dans l'urne U soit aussi rouge ?*

- *Reprenons l'exemple du paragraphe précédent avec les n pièces truquées. On vient d'obtenir Face. Quelle est la probabilité d'avoir tiré la première pièce ?*

Ces formules générales ne sont pas à connaître par coeur. On les retrouve facilement en appliquant consécutivement la formule de Bayes puis la formule des probabilités totales pour le terme du dénominateur.

Comme on le voit sur les exemples ci-dessus, on utilise souvent conjointement la formule des probabilités totales et la formule de Bayes : si A et B sont deux événements tels que $\mathbb{P}(B) \neq 0$ et $\mathbb{P}(A) \in]0\,;1[$, alors

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(B)\mathbb{P}_B(A)}{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}_{\overline{A}}(B)}.$$

Plus généralement, si $(A_1, \dots, A_n)$ est un système complet d'événements tel que, pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, $\mathbb{P}(A_k) \neq 0$, alors pour tout événement B de probabilité non nulle,

$$\forall i \in [\![1\,;n]\!], \qquad \mathbb{P}_B(A_i) = \frac{\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}_{A_i}(B)}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}_{A_k}(B)}.$$

Ce n'est vrai que lorsque $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)$.

⚠ La formule de Bayes montre que, en général, $\mathbb{P}_A(B) \neq \mathbb{P}_B(A)$. Penser que ces deux quantités sont égales est non seulement une erreur à éviter dans les épreuves de concours mais surtout une erreur à ne pas faire dans la vie de tous les jours. Examinons cela à travers un exemple supplémentaire :

> *On réalise un test sanguin pour détecter une maladie dont la probabilité d'occurrence est $0,5\%$. Si le patient est malade, le test détecte la maladie dans 95% des cas. Cependant ce test déclare malades (à tort) 1% des personnes saines. Quelle est la probabilité qu'un patient soit malade sachant que le test est positif ?*

⚠ La plupart des gens répondraient (à tort) 95%.

Cadre d'utilisation de la formule de Bayes : quand on cherche une probabilité conditionnelle, et que la probabilité conditionnelle « miroir » est connue ou facile à calculer, c'est-à-dire si on cherche $\mathbb{P}_A(B)$ alors que l'on connaît $\mathbb{P}_B(A)$. Par exemple, ci-contre, on cherche $\mathbb{P}_T(M)$ et on connaît $\mathbb{P}_M(T)$.

Cet exemple montre qu'il faut se méfier de son intuition concernant le calcul de probabilités, surtout concernant les probabilités conditionnelles, et que l'usage des formules que l'on vient de voir s'impose systématiquement.

III Indépendance

1) Indépendance de deux événements

Intuitivement deux événements sont indépendants si la réalisation (ou non) de l'un d'entre eux n'affecte pas la probabilité que l'autre se réalise (ou non). Si A et B sont ces événements, cela se traduit par $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$... bien sûr si A est de probabilité non nulle. Pour éviter ce problème, voici la définition que l'on prendra pour l'indépendance d'événements :

donc $\dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \mathbb{P}(B)$ et donc

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Définition. *On dit que deux événements A et B sont indépendants si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.*

Proposition. *Soient A et B des événements tels que $\mathbb{P}(A) \neq 0$. Les événements A et B sont indépendants si et seulement si $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$.*

En pratique nous verrons que l'indépendance ne se démontre pas. En général l'indépendance est une hypothèse de modélisation qui permet de simplifier les calculs.

Typiquement si on effectue deux lancers successifs d'une pièce ou d'un dé (ou deux tirages successifs avec remise de boules dans une urne), alors on fera l'hypothèse que les deux lancers sont indépendants : tout événement concernant le résultat du premier lancer seul sera indépendant d'un événement concernant le résultat du deuxième lancer seul.

Exemple : *On lance deux fois de façon indépendante une pièce de monnaie telle que la probabilité d'obtenir Pile est $p \in]0\,;1[$. Notons A l'événement « les deux lancers donnent le même résultat » et B l'événement « le deuxième lancer donne face ». A priori l'événement A semble dépendre de l'événement B... analysons cela avec des calculs.*

Plus fort : si deux événements sont incompatibles, le fait que l'un est réalisé nous dit que l'autre ne l'est pas. Ainsi, intuitivement, on « voit » que deux événements incompatibles ne sont pas indépendants...

L'indépendance de deux événements n'a rien à voir avec le fait que ces deux événements soient incompatibles ou non. D'ailleurs aucune des deux hypothèses n'entraîne l'autre a priori.

— *Quand on lance une pièce équilibrée, les événements A : « obtenir Pile » et B : « obtenir Face » sont incompatibles mais pas indépendants puisque* $\mathbb{P}(A \cap B) = 0 \neq \dfrac{1}{4} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

— *Les événements « j'ai faim » et « ma voiture est grise » peuvent tout à fait arriver en même temps mais semblent totalement indépendants.*

Plus précisément, l'incompatibilité est une notion ensembliste (elle est définie sur un espace probabilisable) alors que l'indépendance est une notion probabiliste (elle dépend de la probabilité considérée). En particulier, si A, B et C sont trois événements, il se peut que A et B soient indépendants pour $\mathbb{P}$ mais pas pour $\mathbb{P}_C$ (par définition, A et B sont indépendants pour $\mathbb{P}_C$ si $\mathbb{P}_C(A \cap B) = \mathbb{P}_C(A)\mathbb{P}_C(B)$, on dit aussi que A et B sont indépendants conditionnellement à C).

Là encore, si on sait quelle pièce on lance, calculer la probabilité que A ou B soit réalisé est enfantin : il y a plusieurs cas particuliers, dans chaque cas particulier on sait répondre. On pense donc à appliquer la formule des probabilités totales.

Par exemple, si on dispose d'un dé équilibré et de deux pièces : une équilibrée et une telle que Face tombe deux fois plus souvent que Pile. On lance le dé et

— *Si on obtient 6, alors on lance deux fois la pièce équilibrée.*

— *Sinon on lance deux fois la pièce truquée.*

Notons A : « obtenir Pile au premier lancer », B : « obtenir Pile au second lancer » et C : « obtenir 6 au lancer de dé ». Nous pouvons raisonnablement supposer que A et B sont indépendants conditionnellement à C (et à $\overline{C}$). Par contre A et B ne sont pas indépendants. En effet :

Proposition. *Si A et B sont des événements indépendants, alors A et $\overline{B}$ sont indépendants, $\overline{A}$ et B sont indépendants et $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.*

C'est intuitif ! Si le fait que A soit réalisé n'apporte aucune information sur B, alors le fait que A ne soit pas réalisé n'apporte aucune information !

Démonstration. La famille $(B, \overline{B})$ est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales, $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \overline{B})$, si bien que :

$$\mathbb{P}(A \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(B)) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\overline{B}).$$

Ainsi A et $\overline{B}$ sont indépendants. Les autres cas sont analogues. $\square$

L'indépendance deux à deux n'est donc pas la bonne notion d'indépendance lorsque l'on a plusieurs événements. Nous verrons l'indépendance dite mutuelle dans le paragraphe suivant.

Par contre, si des événements A, B et C sont indépendants deux à deux, alors on ne peut rien dire sur l'indépendance de A et $B \cap C$, ou encore de A et $B \cup C$.

Par exemple : on dispose de deux dés équilibrés de couleurs respectives bleue et rouge. On lance les deux dés et on relève les chiffres obtenus. On prend $\Omega = [\![1\,;6]\!]^2$ et $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$. Notons A : « La somme des chiffres vaut 7 », B : « Le dé bleu a donné 5 » et C : « Le dé rouge a donné 2 ». Nous avons

Ce dernier exemple motive l'introduction de la notion d'événements mutuellement indépendants.

2) Famille d'événements indépendants

Il se peut que le mot « mutuellement » ne soit pas précisé. Si on dit que plusieurs événements sont indépendants, on sous entend toujours qu'ils sont mutuellement indépendants. Il s'agit de la bonne notion d'indépendance.

Définition (indépendance mutuelle). *On dit que les événements $A_1, \dots, A_n$ sont mutuellement indépendants si :*

$$\forall J \subset [\![1\,;n]\!], \qquad \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j).$$

Si J est l'ensemble vide ou un singleton, l'égalité ci-dessus est vérifiée. On peut donc se contenter de la prouver pour les parties à au moins deux éléments. En particulier, pour montrer que trois événements A, B et C sont mutuellement indépendants, on doit montrer que $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)$, $\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$ et que $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$.

Des événements indépendants sont deux à deux indépendants (prendre J n'importe quelle partie de $[\![1\,;n]\!]$ à deux éléments) mais la réciproque est fausse ! Montrer que des événements sont deux à deux indépendants ne permet pas de conclure qu'ils sont mutuellement indépendants.

Dans l'exemple ci-dessus avec les dés rouge et bleu, les événements A, B et C sont deux à deux indépendants mais ils ne sont pas mutuellement indépendants car

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{36} \neq \frac{1}{6^3} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C).$$

Proposition. *Si A, B et C sont trois événements mutuellement indépendants, alors A et $B \cap C$ sont indépendants et A et $B \cup C$ sont indépendants.*

Démonstration.
- Nous avons $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B \cap C)$ donc A et $B \cap C$ sont indépendants.
- La formule de Poincaré nous donne

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cap (B \cup C)) &= \mathbb{P}((A \cap B) \cup (A \cap C)) \\ &= \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(A \cap B \cap C) \\ &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B \cap C) \\ &= \mathbb{P}(A)\big(\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B \cap C)\big) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B \cup C)\end{aligned}$$

  donc A et $B \cup C$ sont indépendants. □

Plus généralement, on a :

Théorème. *Soient $A_1, \ldots, A_n$ des événements mutuellement indépendants.*

1. *Si pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, $B_k = A_k$ ou $\overline{A}_k$, alors $B_1, \ldots, B_k$ sont mutuellement indépendants.*
2. *Si $J \subset [\![1\,;n]\!]$, alors $(A_i)_{i \in J}$ est une famille d'événements mutuellement indépendants.*
3. *Si $J \subset [\![1\,;n]\!]$, alors tout événement construit à partir de $(A_i)_{i \in J}$ est indépendant de tout événement construit à partir de $(A_i)_{i \notin J}$.*

Par « construit avec », on comprend avec des unions, intersections, complémentaires, etc.

⇝ Exercice.

Exemple : *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance n fois successivement une pièce de monnaie. La pièce est telle que la probabilité de tomber sur Pile est $p \in]0\,;1[$. Pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, notons A_k l'événement « obtenir Pile au $k^{\text{ième}}$ lancer ». On fait donc l'hypothèse que ces n événements sont mutuellement indépendants.*

C'est le cadre d'une loi géométrique, cf. chapitre 29.