Chapitre 10

Élements de combinatoire

> La plupart des résultats de ce chapitre ne sont pas clairement au programme. Mais il ne fait aucun doute qu'on en aura besoin pour faire des calculs de probabilités.

La combinatoire est la branche des mathématiques qui consiste à compter le nombre d'éléments d'un ensemble fini. L'objectif de ce chapitre est de présenter quelques élements de combinatoire qui seront utiles aux calculs de probabilités dans les chapitres suivants (dans les situations dites « d'équiprobabilité »). Conformément au programme, on évitera un usage avancé de la combinatoire. Nous utiliserons une approche intuitive (mais satisfaisante) dans les démonstrations.

I Cardinal d'un ensemble

> Rappelons que, par convention, lorsqu'on décrit un ensemble par extension, chaque élément n'y figure qu'une seule fois. Se donner une bijection de $[\![1\,;n]\!]$ revient à écrire E sous la forme $\{x_1; \dots; x_n\}$, les x_i, $i \in [\![1\,;n]\!]$, étant tous distincts. Autrement dit cela revient à numéroter les éléments de E.

Intuitivement, un ensemble E est dit fini s'il possède un nombre fini d'éléments. On appelle cardinal le nombre d'éléments de E. Plus rigoureusement :

Définition. *Soit E un ensemble non vide. On dit que E est fini si il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et une bijection $\varphi : [\![1\,;n]\!] \longrightarrow E$. L'entier n (dont on admet l'unicité) est alors appelé le cardinal de E et noté $\mathrm{card}(E)$.*

Remarque : On étend cette définition en posant $\mathrm{card}(\varnothing) = 0$. Cette convention est naturelle : le vide contient 0 élément.

Exemple :

Proposition. *Soient E et F deux ensembles en bijection. Si E est fini, alors F est fini et $\mathrm{card}(F) = \mathrm{card}(E)$.*

> La proposition suivante est tout à fait intuitive mais, si on utilise la définition avec les bijections, il faudrait la montrer rigoureusement par récurrence sur le nombre d'éléments de A (ce qui sort du programme).

Démonstration. Soit $f : E \longrightarrow F$ une bijection. Notons n le cardinal de l'ensemble fini E. Par définition il existe une bijection $\varphi : [\![1\,;n]\!] \longrightarrow E$. Il s'ensuit que $f \circ \varphi : [\![1\,;n]\!] \longrightarrow F$ est une bijection. Ainsi F est fini et $\mathrm{card}(F) = n = \mathrm{card}(E)$. □

Proposition. *Soit E un ensemble fini. Toute partie A de E est finie et $\mathrm{card}(A) \leqslant \mathrm{card}(E)$, avec égalité si et seulement si $A = E$.*

II Principes de dénombrement

1) Principe additif

> Cette proposition (que nous admettons) et le principe additif sont tout à fait intuitifs : pour compter le nombre d'objets dans une collection d'objets, on peut faire n tas, compter le nombre d'objets dans chaque tas, puis sommer les nombres obtenus. Un exemple trivial : si on a 3 bonbons rouges et 7 bonbons bleus, alors on a 10 bonbons.

Proposition. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_1, \dots, A_n$ des ensembles finis et **deux à deux disjoints**. Alors $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ est fini et*

$$\mathrm{card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{card}(A_i).$$

Derrière cet énoncé mathématique se cache un principe de comptage :

Principe additif : si pour dénombrer un certain ensemble fini (i.e. compter le nombre de façons de choisir un élément de cet ensemble), on peut effectuer un choix parmi r_1 possibilités ou bien (*ou exclusif*) un autre choix parmi r_2 possibilités ou bien un autre choix parmi r_3 possibilités, etc. ou bien enfin un autre choix parmi r_n possibilités, alors l'ensemble contient $r_1 + r_2 + r_3 + \cdots + r_n$ éléments.

Proposition. *Soient A et B deux parties d'un ensemble fini E. Alors*

1. $\operatorname{card}(B \backslash A) = \operatorname{card}(B) - \operatorname{card}(A \cap B)$.
2. $\operatorname{card}(\overline{A}) = \operatorname{card}(E) - \operatorname{card}(A)$.

Démonstration. Le premier découle du fait que B s'écrit comme l'union disjointe de $B \backslash A$ et de $A \cap B$. Pour le deuxième, on applique le premier avec $B = E$. □

Là encore c'est intuitif : pour compter les éléments d'une union de deux ensembles, on ajoute les éléments de chaque ensemble mais on retranche les éléments qui sont communs aux deux ensembles (car on les a comptés en double).

Proposition (formule de Poincaré). *Soient A et B deux ensembles finis. Alors $A \cup B$ et $A \cap B$ sont finis et $\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B) - \operatorname{card}(A \cap B)$.*

Démonstration.

□

Exemple : *Lors du mariage de Amy et Sheldon, on sait que 121 invités connaissent Amy, 108 connaissent Sheldon et 81 connaissent les deux à la fois. Sachant que chaque invité connait au moins le marié ou la mariée, combien y a-t-il d'invités en tout ?*

2) Principe multiplicatif

Soient r et p des entiers naturels non nuls. Soit E un ensemble non vide qui s'écrit sous la forme $E = \bigcup_{i=1}^{r} A_i$ avec $A_1, \ldots, A_r$ des ensembles deux à deux disjoints et de même cardinal p. En appliquant le principe additif, on obtient que $\operatorname{card}(E) = rp$. Remarquons que choisir un élément de E revient exactement à choisir l'une des parties A_i, $1 \leqslant i \leqslant r$, puis un élément parmi les p de cette partie. Par récurrence, on en déduit un principe de comptage :

Ce sont les nombres qui sont indépendants et non les possibilités à chaque choix

Principe multiplicatif : si pour dénombrer un ensemble fini, on peut effectuer une succession de $n \in \mathbb{N}^*$ choix ayant respectivement $r_1, \ldots, r_n$ possibilités (sous entendu les nombres $r_1, \ldots, r_n$ ne dépendent pas des choix effectués), alors cet ensemble contient $r_1 \times r_2 \times \cdots \times r_n$ possibilités.

Exemple : *En France, à tout véhicule est attribué un numéro d'immatriculation (SIV) formé de sept caractères alphanumériques : deux lettres, un tiret, trois chiffres, un tiret et deux lettres (par exemple KZ-119-EP). Les lettres interdites sont I, O et U (car elles sont trop ressemblantes avec 1, 0 et V respectivement). La série de chiffres 000 est interdite, ainsi que la série de lettres SS. Enfin la série WW est interdite pour le bloc de gauche (elle correspond aux immatriculations provisoires). Pour choisir une immatriculation, on peut :*

Une démonstration plus rigoureuse consiste à remarquer que, si A et B sont deux ensembles alors

$$A \times B = \bigcup_{a \in A} \{a\} \times B.$$

Il s'agit d'une union disjointe donc $A \times B$ est de cardinal

$$\sum_{a \in A} \underbrace{\operatorname{card}(\{a\} \times B)}_{=\operatorname{card}(B)}.$$

donc $\operatorname{card}(A)\operatorname{card}(B)$. Ensuite on procède par récurrence.

Corollaire. *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_1, \ldots, A_n$ des ensembles finis. Alors $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ est fini et*

$$\operatorname{card}(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n) = \prod_{i=1}^{n} \operatorname{card}(A_i).$$

Démonstration. Choisir un n-uplet de $A_1 \times \cdots \times A_n$ revient à choisir le premier élément (il y a $\operatorname{card}(A_1)$ possibilités), puis le deuxième (il y a $\operatorname{card}(A_2)$ possibilités), etc. On conclut avec le principe multiplicatif. □

Corollaire. *Si $\operatorname{card}(E) = n$, alors $\operatorname{card}(E^p) = n^p$. Autrement dit il y a n^p p-uplets constitués d'éléments de E.*

Remarque : En langage combinatoire un élément $(x_1, \ldots, x_p)$ de E^p est appelé p-liste d'éléments de E.

Dans un n-uplet, l'ordre dans lequel on liste des éléments compte. En combinatoire, savoir si on doit compter l'ordre ou pas est très important (cf. partie III pour le cas où l'ordre ne compte pas).

Retenons que pour construire un p-uplet d'éléments de E, il y a n choix pour le premier élément, puis n choix pour le deuxième, n choix pour le troisième, etc. donc il y a $n \times n \times \cdots \times n = n^p$ p-uplets d'éléments de E.

Exemples :

Proposition. *Si $p \in [\![1\,;n]\!]$, alors il y a*

*p-uplets constitués d'éléments **distincts** d'un ensemble de cardinal n.*

Un p-uplet d'éléments distincts de E est aussi appelé p-arrangement de E en langage combinatoire.

Démonstration. Il y a n choix pour le premier élément de la liste, puis, indépendamment de ce premier choix, il y a $n-1$ choix pour le deuxième (on ne peut pas répéter le premier élément choisi), puis $n-2$ choix pour le troisième (on ne peut pas répéter les deux premiers éléments choisis), etc. et enfin $n-p+1$ choix pour le $p^{\text{ième}}$. D'après principe multiplicatif, il y a donc $n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ p-uplets éléments distincts d'un ensemble à n éléments. □

Bien sûr, si $p > n$, il n'existe pas de p-uplet d'éléments distincts d'un ensemble E à n éléments.

Exemple :

Il y a donc $\dfrac{n!}{(n-n)!} = \dfrac{n!}{0!} = n!$ n-uplets de n éléments distincts. Se donner un tel n-uplet revient à ordonner ces éléments :

Proposition. *Il y a $n!$ façons d'ordonner n éléments distincts.*

On parle aussi de permutation pour désigner une façon d'ordonner des éléments.

Exemples :

On a $60! \approx 8,32 \times 10^{81}$. Le nombre d'atomes dans l'univers est de l'ordre de 10^{79}...

Proposition. *Si E est un ensemble fini de cardinal n, alors $\mathscr{P}(E)$ est fini et ______ . Autrement dit il y a 2^n parties d'un ensemble de cardinal n.*

> Une démonstration plus rigoureuse consiste à introduire l'application φ qui à une partie A de E associe le n-uplet $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ tel que, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $\varepsilon_i = 1$ si $x_i \in A$ et $\varepsilon_i = 0$ si $x_i \notin A$. On montre alors que φ est une bijection de $\mathscr{P}(E)$ dans $\{0;1\}^n$. Ainsi le cardinal de $\mathscr{P}(E)$ est $\operatorname{card}(\{0;1\})^n = 2^n$.

Démonstration. Notons $E = \{x_1; \ldots; x_n\}$. On remarque que choisir une partie de E revient à choisir si on met ou pas x_1 dans cette partie (2 possibilités), puis choisir si on met ou pas x_2 dans cette partie (2 possibilités), puis choisir si on met ou pas x_3 dans cette partie (2 possibilités), etc. puis enfin choisir si on met ou pas x_n dans cette partie (2 possibilités). Par principe multiplicatif, il y a donc $2 \times 2 \times 2 \times \cdots \times 2 = 2^n$ parties de E. □

III Combinaisons

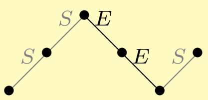
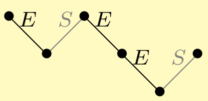
1) Combinaisons et coefficients binomiaux

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit E un ensemble de cardinal n.

Définition. *Soit $p \in [\![1\,;n]\!]$. Une combinaison de p éléments de E est une partie de E de cardinal p.*

> Une combinaison de p éléments de E peut aussi être vue comme une liste de p éléments distincts de E dont l'ordre n'a pas d'importance.

Remarque : Soit $p \in [\![1\,;n]\!]$. Une partie de E à p éléments peut être codée par un chemin réalisant p succès pour n répétitions dans un arbre binaire. En effet, si $E = \{x_1; \ldots; x_n\}$, il suffit de considérer l'application qui à une partie A de E à p éléments associe le chemin tel que, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, le $i^{\text{ème}}$ pas est un succès si et seulement si $x_i \in A$. On vérifie qu'il s'agit d'une bijection de l'ensemble des parties de E à p éléments dans l'ensemble des chemins réalisant p succès pour n répétitions dans un arbre binaire.

> Par exemple, si on prend $E = \{0;2;4;6;8\}$, alors :
> • La combinaison $\{0;2;8\}$ est codée par le chemin
>
> 
>
>
> • Le chemin
>
> 
>
>
> code la combinaison $\{2;8\}$.

Définition. *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![1\,;n]\!]$. On note $\binom{n}{p}$ le nombre de combinaisons de p éléments (c'est-à-dire du nombre de parties de cardinal p) d'un ensemble quelconque de cardinal n. Il s'agit aussi :*

- *du nombre de chemins réalisant p succès pour n répétitions dans un arbre binaire.*
- *du nombre de façons de choisir p éléments distincts parmi n éléments sans ordre particulier.*

Puisqu'il n'y a qu'une seule partie à 0 élément (l'ensemble vide), on a $\binom{n}{0} = 1$.

Proposition. *Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![0\,;n]\!]$, alors $\displaystyle\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.*

Démonstration.

□

> Si $p > n$, il n'existe aucune partie d'un ensemble à n éléments contenant p éléments. Ainsi on pose $\binom{n}{p} = 0$.

Exemples :

- *Combien y a-t-il d'anagrammes (ayant un sens ou non) du mot MILLEFEUILLE ?*

Par exemple, si on prend $E=\{1;3;5;7;9\}$, alors il y a $\binom{5}{3}=\dfrac{5!}{3!2!}=\dfrac{120}{12}=10$ combinaisons de 3 éléments de E :

$$\begin{array}{ll} \{1;3;5\}, & \{1;3;7\}, \\ \{1;3;9\}, & \{1;5;7\}, \\ \{1;5;9\}, & \{1;7;9\}, \\ \{3;5;7\}, & \{3;5;9\}, \\ \{3;7;9\}, & \{5;7;9\}. \end{array}$$

- *Soit E une partie finie de $\mathbb{R}$ ayant n éléments. Soit $p \in [\![1\,;n]\!]$. Combien y a-t-il de p-uplets d'éléments de E rangés par ordre strictement croissant ?*

Raisonnement classique : choisir d'abord des objets sans ordre (avec des combinaisons), puis les ordonner.

- *Combien y a-t-il de mots de 7 lettres (ayant un sens ou non) contenant 4 consonnes et 3 voyelles ?*

Une erreur classique est de répondre $20^4 6^3$. Ce serait la bonne réponse si les consonnes étaient toutes au début du mot. Ici il faut compter toutes les façons de placer 4 consonnes dans un mot de 7 lettres.

2) Revisitons les propriétés des coefficients binomiaux

- L'ensemble vide est la seule partie de E de cardinal 0 donc $\binom{n}{0}=1$. L'ensemble E est la seule partie de E de cardinal n donc $\binom{n}{n}=1$. Les parties de E à un seul élément sont les singletons. Il y en a n si bien que $\binom{n}{1}=n$.
- Choisir p éléments de E revient exactement à considérer une partie à $n-p$ éléments de E et à prendre tous les éléments qui n'y sont pas. D'où $\binom{n}{p}=\binom{n}{n-p}$.
- Supposons que $p \geqslant 1$. Comptons de deux manières différentes le nombre de parties de $[\![1\,;n]\!]$ de cardinal p ayant un élément distingué (qu'on appellera chef).
  — on peut d'abord choisir une partie de cardinal p ($\binom{n}{p}$ choix), puis choisir un chef (p choix indépendants). On obtient donc $p\binom{n}{p}$ possibilités.
  — ou bien, on peut d'abord choisir un chef (n choix) puis choisir une partie de cardinal $p-1$ parmi les $n-1$ éléments restants ($\binom{n-1}{p-1}$ choix). On obtient donc $n\binom{n-1}{p-1}$ possibilités.

  On en déduit la « formule du chef » : $p\binom{n}{p}=n\binom{n-1}{p-1}$.

Les entiers $\binom{n}{p}$ sont appelés les coefficients binomiaux. Nous avons vu leurs propriétés principales dans le chapitre 4. Dans ce paragraphe on en donne une preuve avec des arguments combinatoires.

- Supposons que $p \leqslant n-1$. Soit x un élément de E. Parmi les parties de E de cardinal p (il y en a $\binom{n}{p}$), on dénombre de manière disjointe :
  — les parties de $E\backslash\{x\}$ de cardinal p (il y en a $\binom{n-1}{p}$),
  — les parties de E de cardinal p qui contiennent x : on choisit une partie de $E\backslash\{x\}$ à $p-1$ éléments et on lui ajoute l'élément x (il y a $\binom{n-1}{p-1}$ choix).

  On en déduit la formule de Pascal : $\binom{n}{p}=\binom{n-1}{p-1}+\binom{n-1}{p}$.
- Choisir un élément de $\mathscr{P}(E)$ consiste à choisir une partie à 0 éléments de E ($\binom{n}{0}$ choix), ou bien une partie à 1 élément de E ($\binom{n}{1}$ choix), ou bien une partie à 2 éléments de E ($\binom{n}{2}$ choix), etc., ou bien une partie à n éléments de E ($\binom{n}{n}$ choix). Ainsi $2^n=\operatorname{card}(\mathscr{P}(E))=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$.

Cette égalité découle également du binôme de Newton, cf. chapitre 4.

3) Démonstration de la formule du binôme de Newton

DÉMONSTRATION. • *Preuve 1 (pas très convaincante) :* Soient $(x,y,n)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{N}$. On a $(x+y)^n=(x+y)\times(x+y)\times\cdots\times(x+y)$. Le développement fait apparaître x^ky^{n-k} pour tout $k\in[\![0,n]\!]$. Pour obtenir ce terme, on choisit lors du développement k facteurs où on utilisera le terme x, les autres étant développés avec y. Il y a donc $\binom{n}{k}$ possibilités.

- *Preuve 2 (par récurrence) :*

IV Application aux tirages

Soient p et n des entiers naturels non nuls.

1) Tirages successifs

Exemples classiques : n boules numérotées de 1 à n, un jeu de $n = 52$ cartes, un dé à n faces.

Dans un tirage avec remise, on peut avoir plusieurs fois le même élément. Pas dans un tirage sans remise.

On considère n objets distinguables. On réalise p tirages successifs (l'ordre compte) parmi ces objets. On peut coder le tirage par un p-uplet $(x_1, \ldots, x_p)$ où, pour tout $i \in [\![1\,;p]\!]$, x_i est le $i^{\text{ième}}$ objet tiré.

- Si les tirages se font avec remise, il y a en a n^p.
- Si les tirages se font sans remise (et si $p \leqslant n$), il s'agit d'un p-uplet d'éléments distincts car on ne peut pas avoir deux fois le même élément. Il y en a $\frac{n!}{(n-p)!}$.

2) Tirages simultanés

Supposons que $p \leqslant n$. On tire simultanément (l'ordre ne compte pas, et on ne peut pas avoir deux fois le même élément) p objets parmi n objets distinguables. On peut coder le tirage par une partie A de cardinal p contenant les objets tirés. Il s'agit d'une combinaison de p éléments d'un ensemble à n éléments. Il y a donc $\binom{n}{p}$ tirages simultanés de p objets parmi n objets.