Chapitre 1

Logique et raisonnements

I Éléments de logique

1) Propositions

Définition. *Une proposition (ou assertion, ou prédicat) est un énoncé qui est soit vrai, soit faux.*
Par convention, quand on énonce une proposition, c'est que l'on affirme qu'elle est vraie.

Exemples :

- *Quelques propositions vraies : « La Terre fait partie du système solaire », « L'entier 24 est un multiple de 3 », « La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ ».*
- *Quelques propositions fausses : « Tous les chats sont gris », « L'entier 25 est un multiple de 3 », « Il existe un réel x tel que $x^2 = -1$ ».*

Définition.

- *Un axiome est une proposition que l'on suppose vraie a priori (et que l'on ne cherche pas à démontrer).*
- *Un théorème est une proposition vraie qui désigne en général une proposition particulièrement importante.*
- *Un lemme est une proposition vraie qui est un résultat préliminaire utile à la démonstration d'une proposition plus importante.*
- *Un corollaire est une proposition vraie qui est la conséquence (souvent immédiate) d'une autre proposition vraie.*
- *Une conjecture est une proposition dont on pense qu'elle est vraie, sans en avoir de preuve.*

À part les axiomes, la véracité (ou la fausseté) d'une proposition doit résulter d'une démonstration (ou preuve) : elle s'appuie sur des hypothèses, sur des axiomes, sur des propositions démontrées précédemment et sur les règles de logique (que nous allons voir en détail dans ce chapitre).

Exemples :

- *La proposition « Par un point extérieur à une droite, il passe une et une seule droite parallèle à cette droite » est un axiome appelé cinquième axiome d'Euclide.*
- *Le théorème de Pythagore est la proposition : « Dans un triangle rectangle, le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des côtés adjacents à l'angle droit ». Il en existe de nombreuses démonstrations.*
- *La conjecture de Goldbach est la proposition non démontrée qui s'énonce comme suit : « Tout nombre entier pair strictement supérieur à 3 peut s'écrire comme la somme de deux nombres premiers » (par exemple, $20 = 7 + 13$ et $2000 = 3 + 1997$).*

En 2014, cette conjecture a été vérifiée pour tous les entiers jusqu'à 4×10^{18}... de quoi penser qu'elle doit être vraie, mais il n'y a pas de preuve à ce jour.

Définition (propositions équivalentes). *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux propositions. La proposition « $\mathcal{A}$ est équivalente à $\mathcal{B}$ » est la proposition notée $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ qui est vraie si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont simultanément vraies ou bien simultanément fausses et qui est fausse sinon.*
Si la proposition $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ est vraie, on dit que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont équivalentes.

Elle est définie par la table de vérité :

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

On dit aussi que deux propositions équivalentes sont deux propositions qui ont les mêmes valeurs de vérité, dans la table de vérité.

Dans la pratique, on n'utilise jamais de table de vérité. Nous les introduisons dans ce chapitre uniquement pour aider à appréhender les opérations sur les propositions.

Si $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, il y a 2^n lignes si il y a n propositions.

Remarques :

- L'équivalence joue pour les propositions le rôle que joue l'égalité pour les nombres.

  Par exemple les expressions $1+2$ et 3 sont différentes et pourtant $1+2=3$. De façon analogue, si x est un réel, les propositions « $x=1$ ou $x=-1$ » et « $x^2=1$ » ne sont pas identiques et pourtant $(x^2=1) \Leftrightarrow (x=1 \text{ ou } x=-1)$.

- Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ des propositions. On a :
  — $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{A}$ (réflexivité).
  — Si $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ est vraie, alors $\mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{A}$ est vraie (symétrie).
  — Si $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ et $\mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{C}$ sont vraies, alors $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{C}$ est vraie (transitivité).

- Une table de vérité est un tableau comportant plusieurs colonnes : dans les colonnes de gauche, on donne les différentes valeurs possibles des différentes propositions entrant en ligne de compte ($\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ etc.) et dans la colonne de droite, on donne la valeur de vérité, vraie (V) ou fausse (F), correspondante de la proposition étudiée ($\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ ci-contre). Par exemple, $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ est fausse si $\mathcal{A}$ est vraie et $\mathcal{B}$ est fausse (deuxième ligne). La valeur de vérité d'une proposition est la dernière colonne de sa table de vérité, et deux propositions sont équivalentes quand elles ont même valeur de vérité (donc la même dernière colonne). Le nombre de lignes (sans compter la première) de la table est le nombre de configurations possibles pour les valeurs de vérité des propositions en jeu :
  — $4=2^2$ lignes s'il y a 2 propositions (VV,VF,FV,FF).
  — $8=2^3$ lignes s'il y a 3 propositions (VVV,VVF,VFV,VFF,FVV,FVF,FFV,FFF).

2) Négation, conjonction, disjonction

Elle est définie par la table de vérité :

$\mathcal{A}$	$\text{non } \mathcal{A}$
V	F
F	V

Définition. *La négation d'une proposition $\mathcal{A}$ est la proposition notée $\text{non } \mathcal{A}$ qui est vraie quand $\mathcal{A}$ est fausse et qui est fausse quand $\mathcal{A}$ est vraie.*

Exemples :

Elle est définie par la table de vérité :

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{B}$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Définition. *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux propositions. La conjonction $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ est la proposition qui est vraie quand les propositions $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont vraies toutes les deux et qui est fausse quand l'une des deux au moins est fausse.*

Exemple :

Elle est définie par la table de vérité :

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \text{ ou } \mathcal{B}$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Définition. . *La disjonction $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$ est la proposition qui est vraie quand l'une des propositions $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, ou les deux, sont vraies et qui est fausse quand les deux sont fausses Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux propositions.*

Exemples :

En clair, en mathématiques, ce n'est pas « entrée/plat ou plat/dessert », c'est « au moins l'un des deux parmi entrée/plat et plat/dessert ». On peut se retrouver avec deux plats en Mathématiques !

Remarque : Le ou mathématique est le « ou inclusif » : ($\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$) est vraie quand au moins l'une des deux est vraie, et même si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont vraies en même temps (contrairement au « ou exclusif » qui signifie « soit l'un, soit l'autre, mais pas les deux » et qui est celui utilisé dans le langage courant).

Les assertions de la proposition suivante sont immédiates :

Proposition. *Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ trois propositions. Les propositions suivantes sont vraies :*

1. $\text{non}(\text{non } \mathcal{A}) \Leftrightarrow \mathcal{A}$,
2. $\mathcal{A}$ ou $(\text{non } \mathcal{A})$,
3. $(\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{A}) \Leftrightarrow \mathcal{A}$,
4. $(\mathcal{A} \text{ ou } \mathcal{A}) \Leftrightarrow \mathcal{A}$
5. $(\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{B}) \Leftrightarrow (\mathcal{B} \text{ et } \mathcal{A})$,
6. $(\mathcal{B} \text{ ou } \mathcal{A}) \Leftrightarrow (\mathcal{A} \text{ ou } \mathcal{B})$,
7. $((\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{B}) \text{ et } \mathcal{C}) \Leftrightarrow (\mathcal{A} \text{ et } (\mathcal{B} \text{ et } \mathcal{C}))$,
8. $((\mathcal{A} \text{ ou } \mathcal{B}) \text{ ou } \mathcal{C}) \Leftrightarrow (\mathcal{A} \text{ ou } (\mathcal{B} \text{ ou } \mathcal{C}))$.

Le point 2 s'appelle le « tiers exclu ». Les points 5 et 6 sont des propriétés dites de « commutativité ». Les points 7 et 8 sont des propriétés dites d'« associativité ».

Proposition (distributivité). *Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ trois propositions.*

- $(\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{B}) \text{ ou } \mathcal{C} \iff (\mathcal{A} \text{ ou } \mathcal{C}) \text{ et } (\mathcal{B} \text{ ou } \mathcal{C})$.
- $(\mathcal{A} \text{ ou } \mathcal{B}) \text{ et } \mathcal{C} \iff (\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{C}) \text{ ou } (\mathcal{B} \text{ et } \mathcal{C})$.

$\rightsquigarrow$ Exercice.

Proposition (lois de Morgan). *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux propositions.*

- $\text{non}(\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{B}) \iff (\text{non } \mathcal{A}) \text{ ou } (\text{non } \mathcal{B})$.
- $\text{non}(\mathcal{A} \text{ ou } \mathcal{B}) \iff (\text{non } \mathcal{A}) \text{ et } (\text{non } \mathcal{B})$.

Démonstration. On vérifie que les propositions $((\text{non } \mathcal{A}) \text{ ou } (\text{non } \mathcal{B}))$ et $\text{non}(\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{B})$ ont la même table de vérité :

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\text{non}(\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{B})$	$\text{non } \mathcal{A}$	$\text{non } \mathcal{B}$	$(\text{non } \mathcal{A}) \text{ ou } (\text{non } \mathcal{B})$

L'autre est analogue et laissé en exercice. □

Exemple : *On lance un dé à 6 faces et on considère $\mathcal{A}$ la proposition « obtenir un chiffre pair » et $\mathcal{B}$ la proposition « obtenir un chiffre strictement supérieur à 3 ».*

3) Implication

a) Définition de l'implication

Elle est définie par la table de vérité :

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Définition. *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux propositions. La proposition « $\mathcal{A}$ implique $\mathcal{B}$ » est la proposition notée $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ qui est vraie lorsque $\mathcal{B}$ est vraie chaque fois que $\mathcal{A}$ est vraie et qui est fausse lorsque $\mathcal{A}$ est vraie et $\mathcal{B}$ est fausse simultanément.*

Pour exprimer que la proposition $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ est vraie, on dit indifféremment :

- *Si $\mathcal{A}$ (est vraie), alors $\mathcal{B}$ (est vraie).*
- *$\mathcal{A}$ est une condition suffisante de $\mathcal{B}$.*
- *$\mathcal{B}$ est une condition nécessaire de $\mathcal{A}$.*

- *Pour que $\mathcal{B}$ (soit vraie), il suffit que $\mathcal{A}$ (soit vraie).*
- *Pour que $\mathcal{A}$ (soit vraie), il faut que $\mathcal{B}$ (soit vraie).*

La proposition $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ **ne signifie pas** « $\mathcal{A}$ est vraie donc $\mathcal{B}$ est vraie ».

> $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ est vraie dans le cas où $\mathcal{A}$ est fausse. Cela peut sembler curieux au premier abord. Cela vient de l'usage courant du *Si... alors...* qui peut porter à confusion. Une implication est le *Si... alors...* que l'on utilise pour exprimer une règle. Prenons l'exemple des propositions $\mathcal{A}$: « boire de l'alcool » et $\mathcal{B}$: « avoir plus de 18 ans ». La règle « Si tu bois de l'alcool, alors tu as plus de 18 ans » est l'implication $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$. La règle n'est enfreinte que dans le cas où $\mathcal{A}$ est vraie et $\mathcal{B}$ est fausse. Dans les autres cas elle est respectée. En particulier, elle est respectée si on ne boit pas !

Exemples :

- *Considérons les propositions $\mathcal{A}$: « Il pleut » et $\mathcal{B}$: « Le sol (de la rue) est mouillé ». On est d'accord que si « il pleut », alors « le sol est mouillé ». Ainsi la proposition $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ est vraie. On peut dire aussi :*
  - *« Il pleut » est une condition .... pour que le sol de la rue soit mouillé. Mais elle n'est pas .... (car le sol sera aussi mouillé si un employé municipal vient de le nettoyer ou s'il a plu peu de temps auparavant...).*
  - *« Le sol est mouillé » est une condition .... pour qu'il pleuve.*
  - *Pour que le sol soit mouillé, il .... qu'il pleuve.*
  - *Pour qu'il pleuve, il .... que le sol soit mouillé.*

  Mais $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ ne signifie pas « il pleut donc le sol est mouillé ».
  Elle est vraie même s'il ne pleut pas.
- *Soit f une fonction définie sur un intervalle I est à valeurs réelles. Si f est dérivable sur I, alors f est continue sur I. On peut dire aussi :*
  - *La proposition « f est continue » est une condition nécessaire de la proposition « f est dérivable ». Mais elle n'est pas suffisante (car la fonction racine carrée est continue sur $\mathbb{R}_+$ mais pas dérivable en 0).*
  - *La proposition « f est dérivable » est une condition .... de la proposition « f est continue ». Mais elle n'est pas ....*
  - *Pour que f soit continue, il .... que f soit dérivable.*
  - *Pour que f soit dérivable, il .... que f soit continue.*
- *Soient A, B et C trois points du plan. Considérons les propositions $\mathcal{P}$: « Le triangle ABC est rectangle en A » et $\mathcal{Q}$: « $BC^2 = AC^2 + AB^2$ ». L'implication $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ est vraie (il s'agit du théorème de Pythagore).*

> Savoir qu'une implication est vraie ou fausse ne nous dit absolument rien sur la véracité de sa réciproque. Par exemple toute fonction dérivable est continue mais la réciproque est fausse.

Définition. *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux propositions. L'implication $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}$ est appelée la réciproque de l'implication $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$.*

Proposition. *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux propositions. La proposition $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ est équivalente à la proposition $(\text{non } \mathcal{A})$ ou $\mathcal{B}$.*

DÉMONSTRATION. On vérifie que $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ et de $((\text{non } \mathcal{A}) \text{ ou } \mathcal{B})$ ont la même table de vérité :

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	non $\mathcal{A}$	$(\text{non } \mathcal{A})$ ou $\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$

□

> Si $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ est vraie mais $\mathcal{A}$ est fausse, alors cela ne dit rien sur $\mathcal{B}$. En revanche, si $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ est vraie et si $\mathcal{B}$ est fausse, alors $\mathcal{A}$ est forcément fausse.

Proposition (transitivité de l'implication). *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux propositions. La proposition $((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$ et $(\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}))$ implique la proposition $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C}$.*

⇝ EXERCICE.

Exemple : *Soient x et y deux réels. Par croissance des fonctions carré et exponentielle sur $\mathbb{R}_+$, les implications « $(0 \leqslant x \leqslant y) \Rightarrow (x^2 \leqslant y^2)$ » et « $(x^2 \leqslant y^2) \Rightarrow (e^{x^2} \leqslant e^{y^2})$ » sont vraies. Par transitivité de l'implication « $(0 \leqslant x \leqslant y) \Rightarrow (e^{x^2} \leqslant e^{y^2})$ » est vraie.*

b) Négation et contraposée d'une implication

C'est intuitif ! $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ est vérifiée si $\mathcal{B}$ est vraie dès que $\mathcal{A}$ l'est. Ainsi, $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ n'est pas vérifiée dès que $\mathcal{A}$ est vérifiée sans que $\mathcal{B}$ le soit : $\mathcal{A}$ et $(\text{non } \mathcal{B})$.

Proposition (négation d'une implication). *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux propositions. La négation de $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ est équivalente à la proposition $\mathcal{A}$ et $(\text{non } \mathcal{B})$.*

Démonstration.

□

Ainsi, la contraposée d'une implication lui est équivalente : c'est le principe du raisonnement par contraposée, cf. paragraphe III. Attention à ne pas la confondre avec sa réciproque ! Une implication et sa réciproque sont indépendantes, l'une peut être vraie et l'autre fausse !

Proposition (contraposée d'une implication). *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux propositions. La proposition $(\text{non } \mathcal{B}) \Rightarrow (\text{non } \mathcal{A})$ est équivalente à la proposition $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$. On l'appelle la contraposée de la proposition $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$.*

Démonstration.

□

Exemple : *Soient A, B et C trois points du plan. La contraposée du théorème de Pythagore est : « Si $BC^2 \neq AC^2 + AB^2$, alors le triangle ABC n'est pas rectangle en A ».*

c) Double implication

Proposition (double implication). *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux propositions. La proposition $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ est équivalente à la proposition $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$ et $(\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A})$.*

Pour montrer que $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ est vraie, on procède soit par équivalences intermédiaires, soit par double implication.

Démonstration. On vérifie que $((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$ et $(\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}))$ et $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ ont la même table de vérité :

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$	$\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}$	$(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$ et $(\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A})$

□

Définition. *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux propositions. Pour exprimer que la proposition $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ est vraie, on dit aussi indifféremment :*

- *$\mathcal{A}$ est une condition nécessaire et suffisante de $\mathcal{B}$.*
- *$\mathcal{A}$ (est vraie) si et seulement si $\mathcal{B}$ (est vraie).*
- *Pour que $\mathcal{A}$ (soit vraie), il faut et il suffit que $\mathcal{B}$ (soit vraie).*

Et donc on évite à tout prix d'utiliser des équivalences lorsqu'elles ne sont pas requises. C'est prendre un risque inutile de se tromper.

Une erreur classique est de confondre implication et équivalence. Montrer une équivalence est bien plus contraignant : il faut montrer en plus que l'on peut revenir en arrière (c'est-à-dire montrer l'implication réciproque). Heureusement la majorité du temps en mathématiques, on a seulement besoin de montrer des implications (les équivalences ne sont requises essentiellement que lorsqu'on résout des équations ou inéquations ou lorsque l'énoncé le demande explicitement).

Les symboles $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ ne sont pas des abréviations et ne doivent pas être utilisées comme telles. En général, on ne mélange pas des phrases écrites en français et des phrases utilisant ces symboles. Cela peut créer des ambiguïtés.

Dans tous les cas relisez-vous : une phrase mathématique, qu'elle soit écrite symboliquement ou avec des phrases, doit toujours avoir un sens sans ambiguïté lorsqu'on la relit à voix haute.

Prenons l'exemple de la proposition :

II Ensembles et quantificateurs

1) Introduction aux ensembles

Dans ce paragraphes, nous introduisons les notions d'ensembles et éléments. Nous y reviendrons plus longuement dans le chapitre 9.

a) Notion d'ensemble et d'éléments

Dans ce cours, on travaille avec une notion intuitive des ensembles.

Définition.

- *Un ensemble E est une collection d'objets appelés éléments de E.*
- *On note $x \in E$ pour dire que l'élément x appartient à E. On note $x \notin E$ pour dire que l'élément x n'appartient pas à E.*
- *On dit que deux ensembles E et F sont égaux, et on note $E = F$, si ils ont les mêmes éléments.*
- *On appelle ensemble vide, et on note $\varnothing$, l'ensemble ne contenant aucun élément.*

Il y a plusieurs façons de définir un ensemble, c'est l'objet des paragraphes suivantes.

b) Définition par extension

Mettre des points virgules est particulièrement indiqué si on met dans l'ensemble des réels écrits sous forme décimale... avec une virgule.

Définir un ensemble par extension consiste à donner explicitement tous ses éléments entre accolades et séparés par des virgules ou des points virgules. Par convention un élément ne figure qu'une seule fois dans la liste et l'ordre dans lequel ils sont listés ne compte pas.

Par exemple :

Il y a deux inconvénients à ce mode de définition :

- Il nécessite de connaître tous les éléments de l'ensemble.
- Il est difficilement maniable avec un grand nombre d'éléments.

c) Définition par compréhension

Si un élément x de E vérifie la propriété P, on écrit « $P(x)$ est vraie » ou simplement « $P(x)$ ».

Définir un ensemble par compréhension consiste à définir l'ensemble par une propriété caractérisant ses éléments. Plus précisément, si P est une propriété portant sur les éléments d'un ensemble E, on note $\{x \in E \,|\, P(x)\}$ l'ensemble des éléments de E qui vérifient la propriété P. Détaillons cette notation :

$$\underbrace{\{}_{\text{accolade}} \quad \underbrace{\cdots}_{\substack{\text{Nature des éléments} \\ \text{de l'ensemble} \\ \text{(réels, entiers etc.)}}} \quad \underbrace{|}_{\substack{\text{barre verticale} \\ \text{de séparation :} \\ \text{lire « tels que »}}} \quad \underbrace{\cdots}_{\substack{\text{Propriété(s) vérifiée(s)} \\ \text{par les éléments} \\ \text{de l'ensemble}}} \quad \underbrace{\}}_{\text{accolade}}$$

$\{x \in E \,|\, P(x)\}$ est l'ensemble des éléments x appartenant à E tels que $P(x)$ soit vraie. En d'autres termes, c'est l'ensemble des éléments de l'ensemble se situant à gauche de la barre verticale vérifiant la propriété à droite de cette barre. Ou enfin : si $x \in E$, alors x appartient à cet ensemble si et seulement si $P(x)$ est vraie. Avec le dernier exemple ci-contre : « Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$x \in S \iff x^5 - 3x - 1 = 0 \text{ ».}$$

Une rapide étude de fonction couplée au théorème de la bijection prouve que cet ensemble comporte trois éléments car l'équation $x^5 - 3x - 1 = 0$ a trois solutions. Cependant, on ne les connaît pas, ce qui n'empêche pas de définir S !

Par exemple :

Il y a deux avantages de ce mode de définition :

- Il permet de définir et de manipuler facilement des ensembles infinis.
- Il n'est pas nécessaire de connaître explicitement tous les éléments de l'ensemble pour le définir. C'est particulièrement frappant avec les deux derniers exemples ci-dessus : on serait particulièrement en peine de donner toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f'(0) = f'(1) = 0$, et on ne sait pas résoudre l'équation $x^5 - 3x - 1 = 0$. On ne sait même pas, au premier abord, combien de solutions cette équation possède !

Remarque : L'ensemble des entiers naturels pairs peut être écrit de la façon suivante :

mais c'est tout de même une notation assez lourde. On utilisera plutôt la notation plus concise

.

Plus généralement, si $f : E \longrightarrow F$ est une application (nous reverrons donc cette notation dans le chapitre 9) et si A est une partie de E, on note $\{f(x) \,|\, x \in A\}$ ou $f(A)$ l'ensemble des images par f des éléments de A. On peut lire : « $\{f(x) \,|\, x \in A\}$ est l'ensemble formé des $f(x)$ quand x parcourt A ». Là aussi, détaillons cette notation :

$$\underbrace{\{}_{\text{accolade}} \quad \underbrace{f(x)}_{\substack{\text{Éléments de} \\ \text{l'ensemble : images} \\ \text{d'un paramètre} \\ x \text{ par } f}} \quad \underbrace{|}_{\substack{\text{barre verticale} \\ \text{de séparation}}} \quad \underbrace{x \in A}_{\substack{\text{Le paramètre} \\ \text{et l'ensemble} \\ \text{qu'il parcourt}}} \quad \underbrace{\}}_{\text{accolade}}$$

> Là aussi, précisons une chose (encore une fois, nous reverrons cette notation dans le chapitre 6) : si $f : E \longrightarrow F$,
>
> $$f(A) = \{f(x) \,|\, x \in A\}$$
>
> est l'ensemble des images par f des éléments de A. En d'autres termes, un élément de F appartient à cet ensemble si et seulement s'il s'écrit sous la forme $f(x)$ avec $x \in A$. Avec des quantificateurs (cf. paragraphe II.2), cela donne : « Soit $y \in F$. Alors :
>
> $$y \in f(A) \iff \exists x \in A, y = f(x) \text{ »}.$$
>
> Cette équivalence est à connaître sur le bout des doigts !

Exemples :

d) Opérations sur les ensembles

On peut aussi définir un ensemble à l'aide d'unions, intersections, passages au complémentaire (cf. ci-dessous) d'ensembles déjà existants. Par exemple, $E = [0\,;1] \cap \overline{\mathbb{Q}}$ est l'ensemble des irrationnels appartenant à $[0\,;1]$.

> Pour montrer qu'un ensemble E est inclus dans un ensemble F, on se donne $x \in E$ et on montre que $x \in F$.

Définition. *Soient E et F deux ensembles. On dit que E est inclus dans F, et on note $E \subset F$, lorsque tous les éléments de E sont aussi des éléments de F. On dit aussi que E est une partie (ou un sous-ensemble) de F.*

On définit alors $\complement_F E = \{\, x \in F \,|\, x \notin E \,\}$, le complémentaire de E dans F, c'est-à-dire l'ensemble des éléments de F qui ne sont pas des éléments de E. On le note aussi $F \backslash E$.

Proposition (double inclusion). *Deux ensembles E et F sont égaux si et seulement si $E \subset F$ et $F \subset E$.*

Définition. *Soit E et F deux ensembles. On note*

- *$E \cap F$ l'intersection de E et F, c'est-à-dire l'ensemble formé des éléments qui sont à la fois dans E et dans F.*
- *$E \cup F$ la réunion de E et F, c'est-à-dire l'ensemble formé des éléments qui sont dans l'un au moins des ensembles E et F.*

On dit que E et F sont disjoints si $E \cap F = \varnothing$. Dans ce cas, on dit que $E \cup F$ est une union disjointe.

Exemples :

> Nous reviendrons plus en détails sur la notion d'ensemble dans la chapitre 9.

2) Quantificateurs

a) Définition

Le quantificateur universel $\forall$ se lit « *Pour tout* » ou « *Quel que soit* ». Le quantificateur existentiel $\exists$ se lit « *Il existe* » (sous-entendu « *Il existe au moins un* »). Enfin $\exists!$ se lit « *Il existe un unique* ».

Définition. *Soit P une propriété portant sur les éléments d'un ensemble E.*

- *La proposition « $\forall x \in E,\ P(x)$ » signifie que tous les éléments de E vérifient la propriété P.*
  On dit que le symbole $\forall$ est le quantificateur universel.
- *La proposition « $\exists x \in E,\ P(x)$ » signifie qu'il existe au moins un élément de E qui vérifie la propriété P.*
  On dit que le symbole $\exists$ est le quantificateur existentiel.
- *La proposition « $\exists!\, x \in E,\ P(x)$ » signifie qu'un et un seul élément de E vérifie la propriété P.*

Exemples :

- *Le fait que la fonction $\cos$ est majorée par 1 sur $\mathbb{R}$ s'écrit :*
- *Le fait que 2 admet une racine carrée s'écrit :*
- *Le fait que tout réel positif admet une unique racine carrée positive s'écrit :*

Remarques :

- Le x dans « $\forall x \in E,\ P(x)$ », dans « $\exists x \in E,\ P(x)$ » et dans « $\exists!\, x \in E,\ P(x)$ » est une variable dite *muette* (ou *liée*). Cela signifie que :
  — On peut remplacer x par une autre « lettre » (qui n'est pas déjà utilisée pour définir un autre objet).
  — Le x n'est pas utilisable dans la suite en tant qu'objet précis (il est *lié* au quantificateur). Notamment si on sait que la proposition « $\exists x \in E,\ P(x)$ » est vraie et que l'on veut l'utiliser pour démontrer une autre proposition, on commencera par écrire :

  Dans ce cas le x n'est plus une variable muette mais un object précis (qui vérifie P). On dit aussi que la variable est *libre*.
- « $\exists!\ x \in E,\ P(x)$ » est une notation condensée de la proposition

  signifiant deux choses :
  — Il existe un unique élément x de E vérifiant P.
  — Si un élément y de E vérifie P, alors $y = x$. Autrement dit x est le seul élément de E à vérifier P.
- On fera bien attention à l'ordre des quantificateurs : si P est une propriété portant sur les éléments de deux ensembles E et F, alors les propositions

  « $\forall x \in E,\ \exists y \in F,\ P(x,y)$ » et « $\exists y \in F,\ \forall x \in E,\ P(x,y)$ »

  n'ont pas la même signification a priori. La première signifie que, pour chaque élément x de E, il existe y dans F (dépendant éventuellement de x) tel que $P(x,y)$ est vrai. La seconde signifie qu'il existe un y dans F tel que, quel que soit x dans E, $P(x,y)$ est vrai (le y universel : c'est le même pour tous les x).

Donnons un exemple issu de la vie quotidienne : si on dit « il existe un film que tous les élèves de cette classe préfèrent », cela signifie que tous les élèves ont le même film préféré (ce qui est sans doute faux), tandis que si on dit « pour tous les élèves de cette classe, il existe un film qu'ils préfèrent », cela signifie que tous les élèves ont un film préféré, pas forcément le même (ce qui est sans doute vrai). Morale de l'histoire : on ne peut pas intervertir $\exists$ et $\forall$ (sauf cas particulier, mais cela découle alors d'un argument mathématique, cf. exercice 6).

Illustrons-cela avec un exemple :

Par contre, quand deux quantificateurs existentiels (resp. universels) se suivent, on peut les échanger sans changer le sens de la proposition : en effet, si une propriété est vraie pour tous x et y, cela n'a aucune importance de prendre x ou y en premier. De même, s'il existe x et y tels que la propriété soit vraie pour x et y, cela importe peu qui a été choisi d'abord.

- ⚠ Le quantificateur universel $\forall$ est distributif sur et mais pas sur ou. Le quantificateur existentiel $\exists$ est distributif sur ou mais pas sur et.

  Par exemple la proposition « $\forall x \in \mathbb{R},\ (\cos(x) \neq 0 \text{ ou } \sin(x) \neq 0)$ » n'est pas équivalente à « $(\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x) \neq 0) \text{ ou } (\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(x) \neq 0)$ ». En effet la première proposition est vraie mais la second est fausse.

- ⚠ Les quantificateurs $\forall$, $\exists$ et $\exists!$ (ainsi que les symboles d'implication $\Rightarrow$ et d'équivalence $\Leftrightarrow$) ne sont pas des abréviations. Ainsi ils ne doivent surtout pas être employés comme des abréviations au milieu d'un texte.

b) Négation d'une proposition contenant des quantificateurs

Proposition. *Soit P une propriété portant sur les éléments d'un ensemble E.*
- *La négation de la proposition « $\forall x \in E,\ P(x)$ » est « $\exists x \in E,\ \mathrm{non}(P(x))$ ».*
- *La négation de la proposition « $\exists x \in E,\ P(x)$ » est « $\forall x \in E,\ \mathrm{non}(P(x))$ ».*

Exemples :

Remarque : On peut nier une proposition contenant plus d'un quantificateur et plus d'une variable exactement de la même façon. Plus précisément, on cherche à nier une proposition du type :

$$\left\{\begin{array}{c}\forall\\ \exists\end{array}\right. x_1 \in E_1, \left\{\begin{array}{c}\forall\\ \exists\end{array}\right. x_2 \in E_2, \ldots, \left\{\begin{array}{c}\forall\\ \exists\end{array}\right. x_n \in E_n, \qquad P(x_1, \ldots, x_n)$$

(c'est-à-dire que devant chaque variable x_i se trouve soit un $\forall$ soit un $\exists$) où $P(x_1, \ldots, x_n)$ est une propriété dépendant des variables $x_1, \ldots, x_n$. **La négation est obtenue en interchangeant $\forall$ et $\exists$ et en niant $P(x_1, \ldots, x_n)$:**

$$\left\{\begin{array}{c}\exists\\ \forall\end{array}\right. x_1 \in E_1, \left\{\begin{array}{c}\exists\\ \forall\end{array}\right. x_2 \in E_2, \ldots, \left\{\begin{array}{c}\exists\\ \forall\end{array}\right. x_n \in E_n, \qquad \mathrm{non}(P(x_1, \ldots, x_n))$$

Exemple : *La négation de « $\exists y \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{N},\ x < y$ » est*

⚠ Attention, il ne faut nier que P et pas les appartenances préalables : la négation de « $\forall x \in E, \dots$ » n'est pas « $\exists x \notin E, \dots$ »). Il faut également faire attention car, parfois, on écrit ces appartenances sous une forme condensée, et on peut confondre les appartenances et la propriété P.

En pratique, il n'est pas nécessaire de détailler autant, on peut donner la négation « version courte » directement, mais attention à ne pas aller trop vite et à ne pas nier ce qui ne relève pas de la proposition P !

Exemple : *La négation de « $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ |u_n - L| \leqslant \varepsilon$ » est*

c) Méthodes

Soit P une propriété portant sur les éléments d'un ensemble E.

- Pour montrer que la proposition « $\forall x \in E,\ P(x)$ » est vraie, on montre que chaque élément x de E vérifie la propriété P. Pour cela, on commencera en général par écrire

  Le fait de fixer un élément de x n'est pas restrictif tant que cet élément est quelconque dans E.

On peut remplacer le « Soit x » par « Considérons x », « Donnons-nous x », « Fixons x », etc.

- Pour montrer que la proposition « $\exists x \in E,\ P(x)$ » est vraie, il suffit en général de trouver un exemple (i.e. un élément de E vérifiant la propriété P). Mais on verra qu'il n'est parfois pas possible d'en trouver un explicitement.
- Pour montrer que la proposition « $\exists!\ x \in E,\ P(x)$ » est vraie, on exhibe en général un élément x de E vérifiant la propriété P et on montre que tous les autres éléments de E ne la vérifient pas. Pour l'unicité, on procède souvent ainsi :
- Pour montrer que la proposition « $\forall x \in E,\ P(x)$ » est fausse, il suffit d'exhiber un élément x dans E ne vérifiant pas la propriété P (en effet cela revient à montrer que sa négation est vraie). Un tel x est appelé un contre-exemple.

  La proposition « Tout entier naturel est la somme de trois carrés » est-elle vraie ?

- Pour montrer que la proposition « $\exists x \in E,\ P(x)$ » est fausse, on montre que chaque élément x dans E ne vérifie pas la propriété P (en effet cela revient à montrer que sa négation est vraie). Ainsi on commence par écrire :

III Raisonnements usuels

1) Le raisonnement direct

Rappelons que, si $\mathcal{A}$ est fausse, alors l'implication $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ est vraie.

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux propositions. Pour montrer qu'une implication est vraie, il suffit donc de montrer que, si $\mathcal{A}$ est vraie, alors $\mathcal{B}$ aussi.

Rédaction type de la preuve directe de $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$.

Exemple :

- *Montrons que la somme de deux entiers impairs est paire à l'aide d'un raisonnement direct.*

Une légende raconte que Carl Friedrich Gauss aurait découvert cette démonstration à l'âge de 9 ans. Son maître d'école lui aurait proposé de calculer cette somme pensant que ça l'aurait occupé pendant un long moment. Mais avec cette astuce Gauss ne mit que quelques minutes...

- *Pour tout entier naturel n, la somme S_n des entiers de 0 et n est égale à $\frac{n(n+1)}{2}$. Montrons cette proposition directement.*

2) Le raisonnement par contraposée

Si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont deux propositions, alors $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$ est équivalent à sa contraposée $(\text{non } \mathcal{B}) \Rightarrow (\text{non } \mathcal{A})$.

Le raisonnement se base sur la contraposée d'une implication Montrer l'implication $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ par contraposée consiste à montrer l'implication $(\text{non } \mathcal{B}) \Rightarrow (\text{non } \mathcal{A})$.

Rédaction type de la preuve par contraposée de $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$.

Exemple : *Montrer que, si n est un entier tel que n^2 est pair, alors n est pair.*

3) Le raisonnement par l'absurde

Le raisonnement par l'absurde se base sur la négation d'une implication : si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont deux propositions, alors

$$\boxed{\phantom{\text{non}(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \iff (\mathcal{A} \text{ et } (\text{non } \mathcal{B}))}}.$$

Montrer l'implication $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ par l'absurde consiste à supposer que $\mathcal{A}$ est vraie mais pas $\mathcal{B}$ et à aboutir une contradiction, à une absurdité (et donc que $(\mathcal{A} \text{ et } (\text{non } \mathcal{B}))$ est fausse).

Rédaction type de la preuve par l'absurde de $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$.

Exemple : *Soient a et b deux réels positifs. Montrer que, si $\frac{b}{1+a} = \frac{a}{1+b}$, alors $a = b$.*

Remarque : Dans la pratique, on peut souvent choisir indifféremment entre un raisonnement par contraposition ou un raisonnement par l'absurde. Attention cependant à bien préciser quel type de raisonnement vous choisissez et de ne pas en changer en cours de rédaction...

4) Le raisonnement par disjonction des cas

Proposition (La disjonction des cas). *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux propositions. Si les implications $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ et $(\text{non } \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B}$ sont vraies, alors la proposition $\mathcal{B}$ est vraie.*

$\rightsquigarrow$ Exercice.

Exemple : *Montrer que, pour tout réel x, $|x - 1| \leqslant x^2 - x + 1$.*

Plus généralement, on a

Proposition. *Soit $\mathcal{B}$ une proposition. Soit n un entier naturel supérieur ou égale à 2. Soient $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n$ des propositions dont l'une (au moins) est vraie. Si les n implications*

$$\mathcal{A}_1 \Rightarrow \mathcal{B}, \qquad \mathcal{A}_2 \Rightarrow \mathcal{B}, \qquad \cdots \qquad \mathcal{A}_n \Rightarrow \mathcal{B}$$

sont vraies, alors $\mathcal{B}$ est vraie.

5) Le raisonnement par analyse-synthèse

Le raisonnement par analyse-synthèse est utilisé généralement lorsqu'on désire prouver l'existence (ou la non existence) de solutions à un problème donné et d'identifier la ou les solutions éventuelles. Si E désigne l'ensemble des solutions du problème, le raisonnement par analyse-synthèse consiste à montrer

$$\text{« } (x \text{ solution du problème}) \iff (x \in E) \text{ »},$$

en utilisant la double inclusion.

Ce raisonnement se déroule en trois étapes :

- Analyse : On suppose que le problème admet une solution et on procède par conditions nécessaires, en accumulant suffisamment de renseignements pour dégager un ou plusieurs candidats à être la solution du problème.
- Synthèse : On vérifie que les candidats (s'il y en a) sont effectivement solutions du problèmes.
- Conclusion : On donne la ou les solutions du problème (s'il y en a).

Si, à l'issue de l'étape d'analyse, on trouve un unique candidat à être la solution et que ce candidat s'avère être effectivement solution, alors on a prouvé aussi l'unicité.

Exemple : *Montrons que toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ s'écrit de façon unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.*

6) Le raisonnement par récurrence

a) Récurrence simple

Proposition (principe de récurrence). *Soit P une propriété portant sur les entiers naturels. On suppose que*

- *Il existe un entier naturel n_0 tel que $P(n_0)$ est vraie.*
- *Pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, si $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$ est vraie.*

Alors, pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, la proposition $P(n)$ est vraie.

La propriété ne s'appelle pas toujours P : c'est à vous de lui donner un nom (ou pas). Aussi le premier entier pour lequel elle est vrai ne s'appelle pas n_0 par défaut. On utilise directement la valeur de n_0 (souvent 0 ou 1) lorsqu'on rédige un raisonnement par récurrence ou bien on dit clairement qu'on l'a appelé n_0.

Démonstration. Admis : le principe de récurrence découle de la construction (hors-programme) de $\mathbb{N}$, l'ensemble des entiers naturels. Il peut être considéré comme un axiome. □

Méthode de rédaction de la preuve par récurrence de « $\forall n \geqslant n_0,\ P(n)$ ».

Exemple : *On a déjà montré (avec un raisonnement direct) que, pour tout entier naturel n, la somme S_n des entiers de 0 et n est égale à $\frac{n(n+1)}{2}$. Montrons-la par récurrence.*

Quelques erreurs à ne jamais faire :

- Mettre $\forall n$ à l'intérieur de définition de la proposition $P(n)$.

  Ci-dessus on a posé, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$: « $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ ». L'erreur en question serait de poser $P(n)$: « $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ ». Dans ce cas la proposition $P(n)$ ne dépend alors pas de n, puisque le n de $\forall n$ est muet et donc on pourrait l'écrire « $\forall k \in \mathbb{N},\ S_k = \dfrac{k(k+1)}{2}$ ».

L'étape d'hérédité commence toujours ainsi : « Soit $n \geqslant n_0$. Supposons H_n est vraie (et montrons que H_{n+1} est vraie) ».

- ⚠ Dans l'hérédité, il ne faut pas démarrer par : « Supposons que, pour tout $n \geqslant n_0$, H_n soit vraie ». Dans ce cas, c'est fini ! On suppose ce qu'on veut prouver !
- ⚠ Dans l'hérédité, il ne faut pas démarrer par : « Supposons qu'il existe $n \geqslant n_0$ tel que H_n soit vraie ». En effet, le n choisi n'est alors pas quelconque alors qu'il faut prouver l'hérédité pour toutes les valeurs de n supérieures ou égales à n_0 : il peut y avoir des trous dans le raisonnement par récurrence !
- ⚠ Dans l'hérédité, on doit prendre n supérieur ou égal à la dernière valeur pour laquelle on a montré l'initialisation.

  Ci-dessus, on a prouvé $P(0)$ donc on suppose $n \in \mathbb{N}$, il ne faut pas supposer $n \in \mathbb{N}^*$! Si cela ne suffit pas, on peut prouver l'initialisation pour une valeur supplémentaire.
- ⚠ Lorsque la propriété est une formule, il ne faut pas l'écrire, constater qu'elle est vraie et annoncer que l'initialisation est vraie. En effet, on ne peut pas encore l'écrire puisqu'on ne sait pas encore qu'elle est vraie, c'est le but de cette étape.

  Ci-dessus il ne faut pas écrire « $S_0 = \dfrac{0(0+1)}{2} = 1$ donc $P(0)$ est vraie » ! En effet, on ne sait pas encore que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$! C'est ce qu'on veut prouver ! Il faut calculer les deux termes séparément et prouver qu'ils sont égaux.
- Il faut aussi éviter (mais ce n'est pas non plus interdit) d'utiliser des équivalences dans l'étape d'hérédité d'une récurrence. En effet l'étape d'hérédité est la preuve d'une implication : il n'y a donc pas besoin de devoir revenir en arrière et c'est prendre un risque inutile que d'utiliser des équivalents.

On rappelle qu'utiliser un équivalent est très contraignant : il faut être sûr que l'on peut bien revenir en arrière.

b) Autres types de récurrence

Proposition (principe de récurrence finie). *Soit P une propriété portant sur les entiers naturels inférieurs ou égaux N (avec $N \in \mathbb{N}$ fixé). On suppose que*

- *Il existe un entier naturel $n_0 \leqslant N$ tel que $P(n_0)$ est vraie.*
- *Pour tout entier naturel n tel que $n_0 \leqslant n \leqslant N-1$, si $P(n)$ est vraie, alors $P(n-1)$ est vraie.*

Alors, pour tout entier naturel n tel que $n_0 \leqslant n \leqslant N$, la proposition $P(n)$ est vraie.

La seule différence avec la récurrence simple est ce point : le n choisi arbitrairement dans la première phrase de l'hérédité est inférieur ou égal à $N-1$ (attention pas à N puisque $P(N+1)$ n'est pas défini).

Proposition (principe de récurrence descendante). *Soit P une propriété portant sur les entiers naturels. On suppose que*

- *Il existe un entier naturel n_0 tel que $P(n_0)$ est vraie.*
- *Pour tout entier naturel n tel que $1 \leqslant n \leqslant n_0$, si $P(n)$ est vraie, alors $P(n-1)$ est vraie.*

Alors, pour tout entier naturel n tel que $n \leqslant n_0$, la proposition $P(n)$ est vraie.

Ici, on suppose l'hypothèse aux deux derniers rangs. Attention, il faut montrer l'initialisation pour deux valeurs ! On généralise sans peine à une récurrence triple ou à une récurrence d'ordre k pour $k \geqslant 3$. Attention, il ne faut pas oublier de montrer l'initialisation pour k valeurs !

Proposition (principe de récurrence double). *Soit P une propriété portant sur les entiers naturels. On suppose que*

- *Il existe un entier naturel n_0 tel que $P(n_0)$ et $P(n_0+1)$ sont vraies.*
- *Pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, si $P(n)$ et $P(n+1)$ sont vraies, alors $P(n+2)$ est vraie.*

Alors, pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, la proposition $P(n)$ est vraie.

Exemple : *Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de Fibonacci définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n \geqslant 0$.

Proposition (principe de récurrence forte). *Soit P une propriété portant sur les entiers naturels. On suppose que*

- *Il existe un entier naturel n_0 tel que $P(n_0)$ est vraie.*
- *Pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, si $P(n_0)$, $P(n_0+1)$, $\dots$ et $P(n)$ sont vraies, alors $P(n+1)$ est vraie.*

Alors, pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, la proposition $P(n)$ est vraie.

Exemple : *Montrons par récurrence forte que tout entier naturel supérieur ou égale à 2 possède un diviseur premier.*

De façon générale, il est conseillé de rédiger une récurrence si on n'est pas sûr de soi : d'une part, cela évitera de se tromper en affirmant un résultat faux (si on ne prouve rien, on risque de se tromper), et d'autre part, si on n'est pas convaincu, comment peut-on espérer convaincre le correcteur ? Si la récurrence est vraiment immédiate, la rédiger prendra moins de cinq minutes (ce qui est peu sur une épreuve de quatre heures).

Remarque : Parfois on rédigera rapidement les récurrence. On parle dans ce cas de « récurrence immédiate ». Un candidat aux concours a le droit de dire cela dans une copie, à deux conditions :

- Avoir déjà rédigé une récurrence dans sa copie (il ne faut donc pas parler de récurrence immédiate pour la première récurrence du sujet). En effet, le correcteur veut voir si le candidat sait rédiger. Une fois qu'il a montré patte blanche, il peut aller plus vite sur les suivantes.
- Que la récurrence soit vraiment immédiate (les correcteurs sont chatouilleux à propos des tentatives d'arnaque). Montrer que le résultat est vrai aux rangs $0, 1, 2, 3$ etc. en faisant apparaître l'argument qui permet de passer du rang 1 au rang 2 (par exemple), en faisant bien comprendre qu'il se généralise, suffit en général à convaincre le correcteur.