Programme de colles - Semaine n° 9

du 13 au 19 novembre 2023

Cette semaine, les colles de Mathématiques portent sur les chapitres suivants (voir au dos pour plus de détails) :

7 – Suites réelles

8 – Limite d'une suite réelle

9 – Ensembles et applications

- La colle commencera par un exercice consistant à montrer qu'une fonction réalise une bijection [1] d'un intervalle I dans un autre (éventuellement à déterminer) en explicitant la réciproque.

  Le cours sera considéré comme connu dès que :
  - *On introduit bien x dans I et y dans J (dans $\mathbb{R}$ si il faut trouver l'intervalle).*
  - *On écrit $y = f(x)$ et on se ramène à quelque chose de la forme $x = g(y)$ via des équivalents (éventuellement en excluant des valeurs de y et donc en passant de $\mathbb{R}$ à un intervalle J).*
  - *On conclut que f est bijective de I dans J et on dit que g est la réciproque.*
- Un deuxième exercice consistera à montrer une égalité ensembliste ou montrer qu'une fonction est injective/surjective/bijective ou non.

  Le cours sera considéré comme connu dès que :
  - *Pour montrer que $A \subset B$, on écrit « Soit $x \in A$ (Montrons que $x \in B$) ».*
  - *L'équivalence entre $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ et « il existe $i \in I$ tel que $x \in A_i$ » est connue.*
  - *L'équivalence entre $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$ et « pour tout $i \in I$ tel que $x \in A_i$ » est connue.*
  - *Les propriétés de distributivité, les lois de Morgan sont connues.*
  - *Les définitions (en terme d'antécédents et quantifiées) d'une fonction injective/surjective/bijective sont connues.*
  - *Pour montrer qu'une fonction f est injective de E dans F, on commence bien par écrire « Soient x et x' dans E tels que $f(x) = f(x')$. (Montrons que $x = x'$) » ou bien « Soient x et x' dans E tels que $x \neq x'$. (Montrons que $f(x) \neq f(x')$) ».*
  - *Pour montrer qu'une fonction f est surjective de E dans F, on commence bien par écrire « Soit $y \in F$ ».*
- S'il reste du temps, un dernier exercice consistera à étudier une suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$. Cet exercice sera entièrement guidé. Un programme Python qui calcule les premiers termes de la suite (voire qui les représente graphiquement) pourra être proposé.

  Le cours sera considéré comme connu dès que :
  - *On pense bien à faire le lien entre le signe de $g : x \longmapsto f(x) - x$ (que l'examinateur a demandé d'étudier préalablement) et la monotonie de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.*
  - *Le théorème de la limite monotone est bien connu (et on ne conclut pas hâtivement que le minorant/-majorant utilisé pour dire que la suite est minorée/majorée est la limite de la suite).*
  - *La rédaction du fait que la limite (lorsqu'elle existe) est un point fixe de f est maitrisée (tout doit être redémontré [2], la continuité de f soit impérativement figurer, ainsi que l'unicité de la limite).*

Prévisions pour la semaine 10 : chapitres 9 et 10 (combinatoire).

1. Aucun usage du corollaire du TVI ou du théorème de la bijection à ce stade.
2. Ce qui est attendu (une fois qu'on a montré, via théorème de la limite monotone, que la suite admet une limite ℓ) : on dit que $u_{n+1} = f(u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(\ell)$ par continuité de f en ℓ, puis que $u_{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$ donc que, par unicité de la limite $\ell = f(\ell)$. Autrement dit ℓ est un point fixe de f.

Détails des chapitres au programme

Chapitre 7 - Suites réelles

cf. programme de la semaine 7.

Chapitre 8 - Limite d'une suite réelle

cf. programme de la semaine 8.

Chapitre 9 - Ensembles et applications

- Ensembles et éléments
  - Appartenance, ensembles égaux, définition par extension/compréhension.
  - Partie d'un ensemble. Inclusion, double inclusion, transitivité.
  - Ensemble vide. Ensemble des parties d'un ensemble.
  - Couples, n-uplets d'éléments. Produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles. Notation E^n. Famille d'éléments d'un ensemble indexée par un ensemble.
  - Union et intersection de parties. Commutativité, distributivité. Parties disjointes. Cas d'une famille quelconque de parties.
  - Complémentaire d'une partie. Lois de Morgan. Cas d'une famille quelconque de parties. Différence de parties.
- Applications
  - Notion d'application $f : E \longrightarrow F$. Image, antécédents, ensembles de départ et d'arrivée. Différence avec la notion de fonction. Domaine de définition. Égalité d'applications. Graphe d'une application. Ensemble image $f(A)$ d'une partie A. Application identité Id_E, application constante.
  - Composition d'applications. Associativité.
  - Applications injectives. La composée de deux injections est une injection.
  - Applications surjectives. La composée de deux surjections est une surjection.
  - Applications bijectives. La composée de deux bijections est une bijection. Application réciproque. Caractérisations d'une bijection. Réciproque d'une composition de bijections.