Programme de colles - Semaine n° 8

du 6 au 12 novembre 2023

Cette semaine, les colles de Mathématiques portent sur les chapitres suivants (voir au dos pour plus de détails) :

7 – Suites réelles

8 – Limite d'une suite réelle

- La colle commencera par un petit exercice consistant à déterminer la limite d'une suite explicite.

  Le cours sera considéré comme connu dès que :

  — *Les limites des suites usuelles (et des fonctions usuelles pour pouvoir composer) et les opérations algébriques sur les limites sont connues.*

  — *Les formes indéterminées et les croissances comparées du cours sont connues (et on ne dit pas qu'il s'agit de croissances comparées quand cela n'en est pas une).*

  — *On pense à factoriser par le terme dominants lorsqu'il y a des sommes.*

  — *On pense à utiliser le théorème d'encadrement lorsqu'il y a un cosinus ou un sinus (d'un terme qui ne tend pas vers 0, sinon on peut utiliser les équivalents usuels), une partie entière ou un $(-1)^{\textit{truc}}$.*

- Un deuxième exercice consistera à étudier une suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$. Cet exercice sera entièrement guidé. Un programme Python qui calcule les premiers termes de la suite (voire qui les représente graphiquement) pourra être proposé.

  Le cours sera considéré comme connu dès que :

  — *On pense bien à faire le lien entre le signe de $g : x \longmapsto f(x) - x$ (que l'examinateur a demandé d'étudier préalablement) et la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

  — *Le théorème de la limite monotone est bien connu (et on ne conclut pas hâtivement que le minorant/-majorant utilisé pour dire que la suite est minorée/majorée est la limite de la suite).*

  — *La rédaction du fait que la limite (lorsqu'elle existe) est un point fixe de f est maitrisée (tout doit être redémontré[1], la continuité de f soit impérativement figurer, ainsi que l'unicité de la limite).*

- S'il reste du temps, un dernier exercice consistera à expliciter le terme général d'une suite arithmético-géométrique ou bien d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants (dont l'équation caractéristique a un discriminant positif) ou encore à montrer que deux suites sont adjacentes.

Prévisions pour la semaine 9 : chapitres 7, 8 et 9 (ensembles et applications).

1. Ce qui est attendu (une fois qu'on a montré, via théorème de la limite monotone, que la suite admet une limite ℓ) : on dit que $u_{n+1} = f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(\ell)$ par continuité de f en ℓ, puis que $u_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ donc que, par unicité de la limite $\ell = f(\ell)$. Autrement dit ℓ est un point fixe de f.

Détails des chapitres au programme

Chapitre 7 - Suites réelles

cf. programme de la semaine 7.

Chapitre 8 - Limite d'une suite réelle

- Limite d'une suite
  - Suite convergente. Suite tendant vers $\pm\infty$. Unicité de la limite.
  - La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\ell \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ si et seulement si $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ tendent toutes les deux vers ℓ.
  - Exemples fondamentaux : suites constantes ou stationnaires, $\dfrac{1}{n^\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ si $\alpha > 0$, $q^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ si $q \in]-1\,;1[$, $n^\alpha \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ si $\alpha > 0$, $q^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ si $q > 1$, $(\ln(n))^\beta \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ si $\beta > 0$, $n! \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
  - Une suite réelle convergente est bornée. Une suite réelle qui tend vers $+\infty$ est minorée mais non majorée. Une suite réelle qui tend vers $-\infty$ est majorée mais non minorée.
  - Les inégalités strictes sur la limite entraîne les mêmes inégalités sur les termes de la suite à partir d'un certain rang. Les inégalités larges passent à la limite, mais pas les inégalités strictes.
  - Théorèmes d'encadrement.
- Opérations sur les suites admettant une limite
  - Limite de suites et composition par une fonction continue (*résultat admis provisoirement*).
  - Opérations algébriques sur les limites. Formes indéterminées.
  - Croissances comparées.
- Suites négligeables, suites équivalentes
  - Suite négligeable devant une autre. Réécriture des croissances comparées. Propriétés (transitivité, produit, multiplication par une constante non nulle). Somme de mêmes petits o.
  - Suites équivalents. Propriétés (réflexivité, symétrie, transitivité, produit, quotient, puissances FIXES).
  - Équivalents usuels : si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, alors $\ln(1+u_n) \sim u_n$, $e^{u_n} \sim 1$, $e^{u_n}-1 \sim u_n$, $(1+u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$ si $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $\cos(u_n) \sim 1$, $1-\cos(u_n) \sim \dfrac{u_n^2}{2}$, $\sin(u_n) \sim u_n$, $\tan(u_n) \sim u_n$.
  - Équivalents quand n tend vers $+\infty$ de $P(n)$ et $P(1/n)$ avec P un polynôme.
- Limites de suites monotones
  - Théorème de convergence monotone
  - Suites adjacentes
- Exemples de suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$
  - Condition nécessaire de convergence vers un point fixe de f, dans le cas où f est continue.
- Utilisation de Python
  - Calcul d'une valeur approchée de la limite.
  - Calculer le plus petit rang pour lequel la suite vérifie une condition.
  - Représentation des termes d'une suite.