

Programme de colles - Semaine n° 6

du 9 au 15 octobre 2023

Cette semaine, les colles de Mathématiques portent sur les chapitres suivants (voir au dos pour plus de détails) :

- 4 – Sommes et produits de réels
- 5 – Éléments de trigonométrie
- 6 – Fonctions usuelles

- La colle commencera par un calcul de somme double. Le résultat final sera simplifié au maximum (factorisé au maximum si c'est un polynôme).

Le cours sera considéré comme connu dès que les étapes classiques sont bien respectées :

- *Les formules d'interversions de sommes doubles sur un domaine rectangulaire, triangulaire ou triangulaire strict sont connues à la perfection. Ensuite on calcule la somme à l'intérieure et on somme le résultat.*
- *Pour chaque calcul de somme, on commence par simplifier le terme dans la somme (rassembler les éventuelles puissances dans une seule), couper éventuellement la somme en plusieurs sommes (par linéarité), factoriser le terme si c'est un produit, sortir un facteur multiplicatif indépendant de l'indice de sommation, faire apparaître une différence d'un terme et du précédent ou suivant (pour reconnaître une somme télescopique).*
- *Les formules du cours sont connues parfaitement : somme des premiers entiers¹, sommes géométriques², formule du binôme de Newton, formule de Pascal.*
- *On sait changer correctement les bornes dans un changement d'indice.*
- *On fait bien attention aux deux bornes de la somme avant d'appliquer les formules (quitte à enlever/ajouter des termes). Les sommes usuelles du cours commencent à 0.*
- *Le résultat final ne dépend pas de l'indice de la somme (erreur très grave).*
- Un deuxième exercice consistera à déterminer le domaine de définition et de dérivabilité d'une fonction avant d'en calculer la dérivée. *Le cours sera considéré comme connu dès que :*
 - *Les domaines de définition et de dérivabilité des fonctions usuelles³ sont connues.*
 - *Pour $D_{g \circ f}$, on s'intéresse bien aux valeurs de x telles que $f(x) \in D_g$ et surtout pas telles que $x \in D_g$. Il est conseillé d'utiliser la formule $D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$.*
 - *Les formules des dérivées des sommes, produits, inverses, quotients et compositions de fonctions sont connues.*
 - *On écrit bien « Soit $x \in D_{f'}$ » avant tout calcul de $f'(x)$.*
- Un dernier exercice consistera à étudier⁴ une fonction « simple⁵ » ou bien à résoudre une équation trigonométrique⁶.

Prévisions pour la semaine 7 : chapitres 5, 6 et 7 (suites réelles).

1. Les sommes des premiers carrés et des premiers cubes ne sont pas exigibles mais pourront être utilisées (ultra classiques) si rappelées par l'examineur.
2. Attention au cas où la raison vaut 1.
3. Toutes les fonctions au programme sauf Arctan.
4. Le plan d'étude pourra être rappelé par l'examineur.
5. Éventuellement celle de l'exercice 2 s'il est raisonnable de trouver son signe.
6. Les seules formules au programme sont l'identité fondamentale et les formules d'addition du sinus et du cosinus. Les autres doivent être rappelées ou redémontrées.

Détails des chapitres au programme

Chapitre 4 - Sommes et produits de réels

cf. programme de la semaine 5.

Chapitre 5 - Éléments de trigonométrie

- Congruences sur \mathbb{R} . Réflexivité, compatibilité avec l'addition et la multiplication.
- Cosinus et sinus.
 - Cercle trigonométrique. Cosinus et sinus d'un réel.
 - Identité fondamentale. Périodicité. Encadrement par -1 et 1 .
 - Angles remarquables, arcs associés.
 - Signe d'un cosinus, d'un sinus.
 - Formules d'addition du cosinus et du sinus. Preuve d'autres formules de trigonométrie.
 - Cas d'égalité de deux cosinus ou deux sinus. Résolution d'équations trigonométriques.
- Tangente.
 - Définition comme rapport de \sin et \cos sur $\mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$
 - Angles remarquables. Périodicité. Signe.

Chapitre 6 - Fonctions usuelles

- Généralités sur les fonctions réelles d'une variable réelle
 - Domaine de définition, image, antécédents.
 - Courbe représentative. Fonctions affines. Équation d'une droite passant par deux points du plan.
 - Opérations sur les fonctions.
 - Propriétés globales des fonctions (signe, périodicité, parité, monotonie, fonctions majorées/minorées/bornées).
- Rappels de Terminale S (*... on reviendra sur tout ça en détail prochainement*)
 - Limite d'une fonction en un réel et en $\pm\infty$. Opérations sur les limites. Asymptotes.
 - Fonctions continues. Théorème des valeurs intermédiaires et son corollaire (*pour le moment on s'aide du tableau de variations pour rédiger... mais on écrit le nom du théorème et on cite les hypothèses*). Application à l'existence et l'unicité de la racine $n^{\text{ième}}$ d'un réel positif.
 - Fonctions dérivables. Caractérisation des fonctions constantes, croissantes et décroissantes sur un intervalle. Cas des fonctions strictement monotones. Tableaux de variations.
- Fonctions usuelles
 - Définition et propriétés des fonctions puissances d'un nombre entier, polynomiales, rationnelles, valeur absolue, partie entière.
 - Définition et propriétés des fonctions exponentielle, logarithme népérien (dont les croissances comparées).
 - Puissances à exposant réel (définitions et propriétés). Fonction puissance d'un réel (prolongée en 0 , continue/dérivable en 0 selon α). Exponentielle de base a .
 - Définition et propriétés des fonctions cosinus, sinus, tangente.
- Représentation graphique de fonctions avec Python
 - Bibliothèques `numpy` et `matplotlib.pyplot`. Fonctions usuelles en Python.
 - Relier des points du plan. Options de tracé.
 - Tracer le graphe d'une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} (en utilisant `np.linspace`, la liste des images, `plt.plot` et `plt.show`).