Programme de colles - Semaine n° 4

du 25 septembre au 1er octobre 2023

Cette semaine, les colles de Mathématiques portent sur les chapitres suivants (voir au dos pour plus de détails) :

1 – Logique et raisonnements

2 – Propriétés des réels

4 – Sommes et produits de réels

La colle commencera par un ou deux exercices du type :

- Montrer une propriété simple par l'absurde.
  Le cours sera considéré comme connu dès que le raisonnement est correctement rédigé : pour montrer par l'absurde que l'implication $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ est vraie, on écrit « Raisonnons par l'absurde. Supposons $\mathcal{P}$ et $\mathrm{non}(\mathcal{Q})$. [...] C'est absurde. Ainsi, par l'absurde, $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ est vraie ».
  Il est donc impératif de savoir nier une proposition.
- Montrer une propriété simple par contraposée.
  Le cours sera considéré comme connu dès que le raisonnement est correctement rédigé : pour montrer par contraposée que l'implication $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ est vraie, on écrit « Raisonnons par contraposée. Supposons $\mathrm{non}(\mathcal{Q})$. [...] Donc $\mathrm{non}(\mathcal{P})$. Ainsi, par contraposée, $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ est vraie ».
  Il est donc impératif de savoir nier une proposition.
- Montrer une propriété portant sur les entiers naturels par récurrence.
  Le cours sera considéré comme connu dès que :
  — *la propriété est correctement introduite[1] : après avoir identifié n_0, on écrit « Pour tout $n \geqslant n_0$, posons $P(n)$: " [...] " ».*
  — *l'étape d'hérédité est correctement rédigée[2] : on écrit « Soit $n \geqslant n_0$. Supposons $P(n)$. (Montrons $P(n+1)$). [...] Donc $P(n+1)$ est vraie. »*
  — *la conclusion est correctement rédigée : on écrit « Par récurrence, pour tout $n \geqslant n_0$, $P(n)$ est vraie. »*
- Résoudre une équation ou inéquation faisant intervenir des trinômes du second degré, des puissances, des racines, des parties entières et/ou des valeurs absolues.
  Le cours sera considéré comme connu dès que les étapes classiques sont bien respectées :
  — *On commence par identifier les « valeurs interdites » (le terme dans une racine doit être positif, un terme au dénominateur doit être non nul).*
  — *On utilise bien des équivalents (ou on raisonne par double inclusion éventuellement).*
  — *On essaie de se ramener à une expression sans dénominateur et sans racines.*
  — *On pense bien à vérifier que les deux termes d'une inégalité sont du même signe avant de passer au carré ou de passer à l'inverse (quitte à faire des cas sur le signe des termes). On garde en tête qu'une racine est positive dès qu'elle existe.*

Un dernier exercice consistera à calculer une somme « simple » dont il faudra écrire le résultat en le factorisant le plus possible.

Prévisions pour la semaine 5 : chapitres 4.

1. Écrire « pour tout n » à l'intérieur de la propriété est une erreur gravissime.
2. Écrire « pour tout n, supposons » est une erreur gravissime.

Détails des chapitres au programme

Chapitre 1 - Logique et raisonnements

- Éléments de logique
  - Propositions équivalentes. Négation d'une proposition. Conjonction et disjonctions de propositions. Lois de Morgan.
  - Implication. Réciproque, contraposée et négation d'une implication. Double implication. Conditions nécessaires, suffisantes.
- Introduction aux ensembles. Définition par extension, par compréhension. Opérations sur les ensembles.
- Quantificateurs universels et existentiels. Négation d'une phrase quantifiée.
- Raisonnement direct, par contraposée, par l'absurde, par disjonction des cas, par analyse/synthèse.
- Raisonnement par récurrence (simple, finie, descendante, double et forte).

Chapitre 2 - Propriétés des réels

- Opérations sur les réels
  - Existence admise de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$.
  - Addition, multiplication, soustraction sur $\mathbb{R}$. Division sur $\mathbb{R}^*$. Cas des rationnels.
  - Propriétés de la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$. Intervalles,
  - Valeur absolue, inégalité triangulaire.
  - Puissances entières. Élévation à une puissance entière dans l'inégalité $x < y$ lorsque x et y sont des réels (selon le signe des réels, la parité et le signe de la puissance entière).
- Parties majorées, parties minorées
  - Majorant, minorant, maximum, minimum, borne supérieure, borne inférieure. Caractérisation.
  - Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un minimum. Toute partie non vide majorée (resp. minorée) de $\mathbb{Z}$ admet un maximum (resp. un minimum). Théorème de la borne supérieure.
  - Partie entière d'un réel.
- Racines de réels positifs
  - Racine n-ième d'un réel positif x, avec $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. Notations $\sqrt[n]{x}$ et $x^{1/n}$. Opérations.
  - Forme canonique d'un trinôme de second degré à coefficients réels lorsque le discriminant est positif ou nul. Solutions de $ax^2 + bx + c = 0$. Signe d'un trinôme.

Chapitre 4 - Sommes et produits de réels (*le début*)

- Familles de réels. Notations $\max$, $\min$, $\sum$, $\prod$.
- Sommes usuelles : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^n$, lorsque $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.
- Sommes classiques non exigibles : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3$.
- Propriétés des sommes et produits
  - Factorisation, linéarité de la somme, sommation par paquets, inégalités.
  - Changement d'indice
  - Sommes et produits télescopiques.
  - Lien entre somme et produit via le logarithme.
- Factorielle et coefficients binomiaux.
  - Factorielle d'un entier. Application au produit des premiers des entiers pairs/impairs.
  - Définition par la formule $\displaystyle\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$. Propriétés immédiates. Formule « du chef » et formule de Pascal.
  - Formule du binôme de Newton.