Programme de colles - Semaine n^{o} 27

du 30 avril au 5 mai 2024

Cette semaine, les colles de Mathématiques portent sur les chapitres suivants (voir au dos pour plus de détails) :

25 – Somme de sous-espaces vectoriels

26 – Espaces vectoriels de dimension finie

- La colle commencera par montrer que deux sous espaces vectoriels sont supplémentaires en explicitant les projections associées (sans utiliser de dimension donc).

  Le cours sera considéré comme connu si les définitions sont connues, ainsi que le critère d'intersection pour la somme directe de deux sous espaces vectoriels, le théorème de concaténation des bases, la méthode d'analyse-synthèse pour déterminer les projections.
- Le reste de la colle consistera en des exercices « simples » sur les espaces vectoriels et les applications linéaires utilisant la notion de dimension du style :
  - Trouver la dimension d'un espace vectoriel (en comptant les vecteurs d'une base).
  - Compléter une famille libre en une base (en cherchant le nombre de vecteurs manquants et en ajoutant des vecteurs venant d'une base connue, comme la base canonique).
  - Montrer qu'une famille est une base (en montrant qu'elle est libre + un argument de dimension).
  - Montrer que deux sous espaces vectoriels sont égaux (en montrant une inclusion + un argument de dimension).
  - Montrer que deux sous espaces sont supplémentaires (en montrant que l'intersection est réduire à $\{0\}$ + un argument de dimension),
  - Trouver un supplémentaire d'un sous espace vectoriel (en déterminant une base, en complétant cette base et en considérant l'espace engendré par les vecteurs qui complètent).
  - Montrer qu'une application linéaire est injective/surjective/bijectif (à l'aide du théorème du rang ou d'une de ses conséquences).
  - Déterminer le rang d'une application linéaire.

Il n'y a pas de colles la semaine 28. Prévisions pour la semaine 29 : chapitres 25, 26 et 27 (codage matriciel)

Détails des chapitres au programme

Chapitre 25 - Somme de sous-espaces vectoriels

cf. programme de la semaine 26.

Chapitre 26 - Espaces vectoriels de dimension finie

- Le théorème de l'échange
  - Compléments sur les familles libres et génératrices.
  - Si $\mathscr{L}$ est une famille libre constituée de p vecteurs de E et $\mathscr{G}$ une famille génératrice constituée de n vecteurs de E. Alors $p \leqslant n$ et on peut remplacer p des vecteurs de la famille $\mathscr{G}$ avec les p vecteurs de la famille $\mathscr{L}$ pour obtenir une nouvelle famille génératrice de E.
  - Si E est engendré par n vecteurs, alors toute famille formée d'au moins $n+1$ vecteurs est liée.
- Dimension d'un espace vectoriel
  - Existence de base en dimension finie. Théorème de la base incomplète. Théorème de la base extraite.
  - Toutes les bases d'un e.v E de dimension finie admettent le même nombre de vecteurs. Ce nombre la dimension de E et noté $\dim_{\mathbb{K}}(E)$.
  - Si E est de dimension finie, une famille libre (resp. génératrice) admet au plus (resp. au moins) $\dim(E)$ vecteurs.
  - Si E est de dimension finie, alors une famille libre (resp. génératrice) de E constituée de $\dim(E)$ vecteurs est une base.
  - Application aux suites récurrentes linéaires d'ordre 2 à coefficient constant.
- Sous-espaces vectoriels et dimension
  - Dimension d'un sous-espace vectoriel. Cas d'égalité.
  - Notions de droite vectorielle, plan vectoriel, hyperplan.
  - Existence de supplémentaires en dimension finie. Bases adaptées à une décomposition $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_n$. Formule de Grassmann. Caractérisations de $E = F \oplus G$ avec la dimension.
  - Rang d'une famille de vecteurs $(x_1, \ldots, x_p)$ en dimension finie n. Le rang r est majoré par $\min(p, n)$. La famille $(x_1, \ldots, x_p)$ est libre (resp. génératrice, resp. une base) si et seulement si $r = p$ (resp. $r = n$, resp. $r = n = p$). Calcul du rang par opérations élémentaires sur les vecteurs.
- Applications linéaires en dimension finie
  - Caractérisation d'une application linéaire par la donnée des images des vecteurs d'une base (rappel). Isomorphismes en dimension finie.
  - Rang d'une application linéaire sur une espace de dimension finie. Lien avec le rang de la famille des vecteurs images.
  - Théorème du rang. Liens entre injectivité, surjectivité, rang et dimensions. Si $\dim(E) = \dim(F)$, alors une application linéaire f de E dans F est surjective ssi elle est injective ssi elle est bijective.
  - Formes linéaires et hyperplans. Un sous espace vectoriel est un hyperplan si et seulement si il admet une droite pour supplémentaire. Le noyau d'une forme linéaire non nulle est un hyperplan.