Programme de colles - Semaine n$^{\text{o}}$ 26

du 23 au 29 avril 2024

Cette semaine, les colles de Mathématiques portent sur les chapitres suivants (voir au dos pour plus de détails) :

24 – Séries numériques

25 – Somme de sous-espaces vectoriels

- La colle commencera par déterminer la nature d'une série dont le terme général est équivalent à celui d'une « série de Bertrand ».

  Le cours sera considéré comme connu si :

  — *on pense bien à vérifier que la série est à termes positifs et sinon on met des valeurs absolues (et on utilisera la convergence absolue),*

  — *on commence par chercher un équivalent simple (les équivalents usuels et les DL sont connus et on repasse par la notation faisant le lien avec les petits o pour les sommer et les composer),*

  — *si la suite à laquelle le terme général est une série du type* $\sum \frac{1}{n^\alpha(\ln(n))^\beta}$ *avec* $\alpha \neq 1$, *on pense à diviser par* $\frac{1}{n^{(1+\alpha)/2}}$.

  — *on se ramène à l'utilisation d'un théorème de comparaison en mentionnant bien la positivité.*

- Le reste de la colle consistera en un exercice sur les sommes d'espaces vectoriels.

  Le cours sera considéré comme connu si les définitions sont connues, ainsi que le critère d'intersection pour la somme directe de deux sous espaces vectoriels, le théorème de concaténation des bases, la méthode d'analyse-synthèse pour déterminer les projections.

Prévisions pour la semaine 27 : chapitres 25 et 26 (espaces de dimension finie).

Détails des chapitres au programme

Chapitre 24 - Séries numériques

cf. programme de la semaine 26.

Chapitre 25 - Somme de sous-espaces vectoriels

- Somme de sous-espaces vectoriels
  - Somme $F_1 + \cdots + F_n$ d'espaces vectoriels. C'est un sous-espace vectoriel qui contient $F_1, \ldots, F_n$.
  - Somme directe. Notation $\oplus$. La somme $F_1 + \cdots + F_n$ est directe si et seulement si, pour tout $(x_1, \ldots, x_n)$ dans $F_1 \times \cdots \times F_n$, si $x_1 + \cdots + x_n = 0$ alors $x_1 = \cdots = x_n = 0$.

    Cas particulier pour deux s.e.v : la somme $F + G$ est directe si et seulement si $F \cap G = \{0\}$.
  - La concaténation de familles génératrices de deux sous-espaces vectoriels engendre la somme. Théorème de concaténation des bases.
- Supplémentaires et projections
  - Notion de supplémentaire et caractérisations. Exemples de raisonnement par analyse-synthèse.
  - Projection (vectorielle) p sur F parallèlement à G (un supplémentaire de F dans E).

    On a alors $p \in \mathcal{L}(E)$, $p \circ p = p$, $G = \mathrm{Ker}(p)$ et $F = \mathrm{Im}(p)$.
  - Si p est un projecteur de E, alors $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$ et p est la projection sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$.