Programme de colles - Semaine n° 25

du 1er au 6 avril 2024

Cette semaine, les colles de Mathématiques portent sur les chapitres suivants (voir au dos pour plus de détails) :

22 – Dérivées successives et formules de Taylor

23 – Analyse asymptotique et développements limités

24 – Séries numériques

- La colle commencera par déterminer la nature d'une série
  Le cours sera considéré comme connu si :
  - *on pense bien à vérifier que la série est à termes positifs et sinon on met des valeurs absolues (et on utilisera la convergence absolue),*
  - *on commence par chercher un équivalent simple (les équivalents usuels et les DL sont connus et on repasse par la notation faisant le lien avec les petits o pour les sommer et les composer),*
  - *on se ramène à l'utilisation d'un théorème de comparaison en mentionnant bien la positivité.*

  Si la suite à laquelle le terme général est une série du type $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}$ *avec* $\alpha \neq 1$, *on pense à diviser par* $\frac{1}{n^{(1+\alpha)/2}}$.
- La colle se poursuivra par un deuxième exercice sur les séries, éventuellement un calcul d'une somme d'une série du type $\sum \frac{an^2+bn+c}{n!}x^n$ ou $\sum (an^2+bn+c)q^n$.
- S'il reste du temps, un dernier exercice consistera à déterminer une asymptote et sa position relative en utilisant un développement asymptotique.

Prévisions pour la semaine 26 (après les vacances) : chapitres 24 et 25 (sommes de sous espaces vectoriels).

Détails des chapitres au programme

Chapitre 22 - Dérivées successives et formules de Taylor

cf. programme de la semaine 23.

Chapitre 23 - Analyse asymptotique et développements limités

cf. programme de la semaine 23.

Chapitre 24 - Séries numériques

- Généralités sur les séries numériques
  - Série : notation $\sum u_n$. Suite des sommes partielles. Expression du terme général d'une série en fonction des sommes partielles. Nature d'une série. Somme d'une série convergente : notation $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$.
  - Exemples des séries géométriques et de la série harmonique.
  - La nature d'une série ne dépend pas de ses premiers termes. Condition nécessaire de convergence. Série qui diverge grossièrement. Série télescopique.
  - Reste d'une série convergente.
  - L'ensemble des séries convergentes est un $\mathbb{R}$-e.v. Somme d'une série convergente et d'une série divergente. Sommation terme à terme dans une inégalité de termes généraux de séries convergentes.
  - Séries absolument convergentes. La convergence absolue implique la convergence. La réciproque est fausse.
- Séries à termes positifs
  - Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite des sommes partielles est majorée.
  - Critères de convergence des séries à termes positifs (cas où $u_n \leqslant v_n$, $u_n = o(v_n)$ et $u_n \sim v_n$).
- Séries de référence
  - Convergence des séries de Riemann. Utilisation des séries de Riemann. Application aux séries du type $\sum \frac{(\ln(n))^\beta}{n^\alpha}$.
  - Convergence des séries géométriques et de leurs deux premières dérivées.
  - Série exponentielle. Convergence absolue et définition de la fonction exponentielle.