

## Programme de colles - Semaine n° 24

du 25 au 31 mars 2024

Cette semaine, les colles de Mathématiques portent sur les chapitres suivants (voir au dos pour plus de détails) :

22 – Dérivées successives et formules de Taylor

23 – Analyse asymptotique et développements limités

- La colle commencera par le calcul d'un développement limité<sup>1</sup> consistant en le produit et/ou la somme de fonctions usuelles (éventuellement à avec substitution par un polynôme).

*Le cours sera considéré comme connu dès que les 8 développements limités usuels du cours sont connus.*

- Elle se poursuivra par des calculs d'équivalents de suites ou de fonctions (présentant des sommes, compositions ou élévation à une puissance variable).

*Le cours sera considéré comme connu dès que :*

— *Les équivalents usuels sont connus.*

— *Les équivalents ne sont jamais sommés, ni composés. On repasse dans ce cas par la notation faisant le lien avec les petits  $o$ .*

- S'il reste du temps, un exercice sur les applications linéaires pourra terminer la colle.

**Prévisions pour la semaine 25** : chapitres 22, 23 et 24 (séries)

---

1. Sans quotient, ni composition de développements limités, conformément au programme.

# Détails des chapitres au programme

## Chapitre 21 - Applications linéaires


cf. programme de la semaine 22.

## Chapitre 22 - Dérivées successives et formules de Taylor


cf. programme de la semaine 23.

## Chapitre 23 - Analyse asymptotique et développements limités

- Négligeabilité

- Suite/fonction négligeable devant une autre.
- Lien des petits  $o$  avec les limites. Propriétés (transitivité, produit, multiplication par une constante non nulle, par une suite/fonction), puissance FIXE, substitution (composition à droite).
-  On n'écrit jamais  $o(0)$ . On ne somme pas deux petits  $o$  (sauf si ce sont les mêmes à une constante multiplicative non nulle près). On ne compose jamais un petit  $o$  à gauche.

- Équivalents

- Suites/fonctions équivalents.
- Liens entre équivalent et limite. Propriétés : réflexivité, symétrie, transitivité, produit, quotient, puissances FIXES, substitution (composition à droite).
-  On n'écrit jamais  $\sim 0$ . On ne somme jamais d'équivalents (ou on repasse par les petits  $o$ ). A part l'élevation à une puissance FIXE, on ne compose jamais des équivalents à gauche par une fonction.
- Lien avec les petits  $o$  ( $u_n \sim v_n \iff u_n = v_n + o(v_n)$  et  $f \sim g \iff f = g + o(g)$ ).
- Équivalents usuels :  $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$ ,  $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$ ,  $(1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x$  si  $\alpha \in \mathbb{R}^*$ ,  $1 - \cos(x) \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$ ,  $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$ ,  $\tan(x) \underset{0}{\sim} x$  et  $\text{Arctan}(x) \underset{0}{\sim} x$ .
- Équivalents de polynômes en 0 et en  $+\infty$ . Équivalents quand  $n$  tend vers  $+\infty$  de  $P(n)$  et  $P(1/n)$  avec  $P \in \mathbb{R}[X]$ .

- Développements limités

- Notion de développement limité en 0. Développement limité en  $x_0 \in \mathbb{R}$  (on se ramène toujours à un  $DL_n(0)$  de  $h \mapsto f(x_0 + h)$ ). Unicité du développement limité.
- Théorèmes d'existence de DL : la fonction  $f$  admet un  $DL_0(0)$  (resp. un  $DL_1(0)$ ) si et seulement si  $f$  est continue (resp. dérivable) en 0. Une fonction admettant un  $DL_n(0)$  avec  $n \geq 2$  n'est pas forcément  $n$  fois dérivable en 0. Formule de Taylor-Young.
- Développements limités usuels :  $\frac{1}{1-u}$ ,  $\frac{1}{1+u}$ ,  $\ln(1+u)$ ,  $\ln(1-u)$ ,  $(1+u)^\alpha$ ,  $e^u$  à l'ordre  $n$ ,  $\sin(u)$  à l'ordre  $2n+1$ ,  $\cos(u)$  à l'ordre  $2n$ .
- Opérations sur les développements limités : substitution, addition, multiplication.
- Applications des développements limités : recherche d'équivalents et de limites, position locale d'une courbe par rapport à sa tangente, recherche d'asymptote en  $\pm\infty$  et position locale.