Programme de colles - Semaine n° 23

du 18 au 24 mars 2024

Cette semaine, les colles de Mathématiques portent sur les chapitres suivants (voir au dos pour plus de détails) :

20 – Introduction aux espaces vectoriels

21 – Applications linéaires

22 – Dérivées successives et formules de Taylor

- La colle commencera par un exercice consistant à montrer une inégalité en utilisant la formule de Taylor avec reste intégrale ou bien l'inégalité de Taylor Lagrange.
  Le cours sera considéré comme connu dès que ces deux formules sont impeccablement connues (attention aux hypothèses).
- Elle se poursuivra par l'étude complète d'une application linéaire (dont la détermination du noyau et l'image).
  Le cours sera considéré comme connu dès que :
  — *Les définitions des notions d'espaces vectoriels, de sous-espaces vectoriels, de combinaisons linéaires, de sous-espaces engendrés par une famille, de familles génératrices, de familles libres, de bases, d'applications linéaires sont connues, de noyau, d'image, de projecteurs.*
  — *Les techniques classiques de preuve sont bien connues.*

Prévisions pour la semaine 24 : chapitres 21, 22 et 23 (analyse asymptotique)

Détails des chapitres au programme

Chapitre 20 - Introduction aux espaces vectoriels

cf. programme de la semaine 21.

Chapitre 21 - Applications linéaires

cf. programme de la semaine 22.

Chapitre 22 - Dérivées successives et formules de Taylor

- Dérivées successives
  - Fonctions n fois dérivables sur I. Dérivée $n^{\text{ième}}$ $f^{(n)}$ de f. Notation $D^n(I,\mathbb{R})$.
  - Fonctions de classe C^n sur I. Notation $C^n(I,\mathbb{R})$. Fonctions de classe C^∞ sur I. Notation $C^\infty(I,\mathbb{R})$.
  - Les ensembles $D^n(I,\mathbb{R})$, $C^n(I,\mathbb{R})$ et $C^\infty(I,\mathbb{R})$ sont des $\mathbb{R}$-e.v. Formule de Leibniz. Existence de dérivées successives de l'inverse, du quotient, de la composée de fonctions.
  - Si $P \in \mathbb{R}_p[X]$ alors, pour tout $n > p$, $P^{(n)}$ est le polynôme nul.
  - Les fonctions polynomiales, rationnelles, exponentielles, logarithmes, sinus, cosinus, tangente et Arctangente sont de classe C^∞ sur leur domaine de définition. Calcul explicite des dérivées successives de $\cos$, $\sin$, $\exp$, X^k et $\ln$.
  - Condition suffisante sur la dérivée seconde pour qu'un point critique soit un extremum local.
- Formules de Taylor
  - Formule de Taylor avec reste intégral. Si $f \in D^n(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est telle que $f^{(n)} = 0$, alors $f \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
  - Inégalité de Taylor Lagrange.
  - Applications : convergence de la série exponentielle, preuve d'inégalités, méthode pour dériver sous le signe intégral.