Programme de colles - Semaine n° 22

du 11 au 17 mars 2024

Cette semaine, les colles de Mathématiques portent sur les chapitres suivants (voir au dos pour plus de détails) :

20 – Introduction aux espaces vectoriels

21 – Applications linéaires

- La colle commencera par un petit exercice choisi par l'examinateur parmi les 4 possibilités suivantes :
  - Montrer qu'un ensemble est un espace-vectoriel [1].
  - Déterminer une famille génératrice d'un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ donné par son équation [2].
  - Déterminer une équation[2] du plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par deux vecteurs non colinéaires.
  - Montrer qu'une famille de trois vecteurs de $\mathbb{R}^4$ est libre.
  - Montrer qu'une application entre deux espaces vectoriels est linéaire.

  Le cours sera considéré comme connu dès que :
  - *Les définitions des notions d'espaces vectoriels, de sous-espaces vectoriels, de combinaisons linéaires, de sous-espaces engendrés par une famille, de familles génératrices, de familles libres, de bases, d'applications linéaires sont connues.*
  - *Les techniques classiques pour mener à bien les cinq possibilités d'exercices ci-dessus sont bien connues.*
- D'autres exercices plus difficiles sur les espaces vectoriels (notamment avec des espaces de polynômes) seront proposés ensuite, y compris avec la détermination du noyau et/ou de l'image d'une application linéaire.

Prévisions pour la semaine 23 : chapitres 20, 21 et 22 (dérivées successives et formules de Taylor)

1. En montrant que c'est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel connu.
2. Sous la forme $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,|\, ax+by+cz=0\}$.

Détails des chapitres au programme

Chapitre 20 - Introduction aux espaces vectoriels

cf. programme de la semaine 21.

Chapitre 21 - Applications linéaires

- Notion d'applications linéaires
  - Notion d'application linéaire. Notation $\mathscr{L}(E, F)$.
  - Premières propriétés
  - Forme linéaire. Endomorphisme, notation $\mathscr{L}(E)$. Isomorphisme. Automorphisme, notation $GL(E)$.
- Opérations sur les applications linéaires
  - Restriction, somme, multiplication par un scalaire, composition. Réciproque d'un isomorphisme.
  - Puissances d'endomorphismes. Binôme de Newton. Polynômes d'endomorphisme. Projecteurs.
- Image et noyau
  - Image d'un s.e.v par une application linéaire f. Formule $f(\mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_n)) = \mathrm{Vect}(f(v_1), \ldots, f(v_n))$.
  - Image $\mathrm{Im}(f)$, noyau $\mathrm{Ker}(f)$. Caractérisation de l'injectivité, surjectivité, bijectivité avec le noyau et l'image. Le cas des projecteurs
- Théorème de caractérisation par l'image d'une base.
  - Conditions pour qu'une famille $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ soit génératrice, libre, liée.
  - Si E admet une base $(e_1, \ldots, e_n)$, alors une application linéaire f est caractérisée par la donnée des images par f des vecteurs de cette base. De plus $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est libre (resp. génératrice, resp. une base) si et seulement si f est injective (resp. surjective, resp. bijective).
  - Deux applications linéaires qui coïncident sur une base sont égales.