Programme de colles - Semaine n° 21

du 4 au 10 mars 2024

Cette semaine, les colles de Mathématiques portent sur les chapitres suivants (voir au dos pour plus de détails) :

17 – Polynômes

18 – Systèmes linéaires

19 – Calcul matriciel

20 – Introduction aux espaces vectoriels

- La colle commencera par un petit exercice choisi par l'examinateur parmi les 4 possibilités suivantes :
  - Montrer qu'un ensemble est un espace-vectoriel [1].
  - Déterminer une famille génératrice d'un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ donné par son équation [2].
  - Déterminer une équation[2] du plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par deux vecteurs non colinéaires.
  - Montrer qu'une famille de trois vecteurs de $\mathbb{R}^4$ est libre.

  Le cours sera considéré comme connu dès que :
  - *Les définitions des notions d'espaces vectoriels, de sous-espaces vectoriels, de combinaisons linéaires, de sous-espaces engendrés par une famille, de familles génératrices, de familles libres et de bases sont connues.*
  - *Les techniques classiques pour mener à bien les quatre possibilités d'exercices ci-dessus sont bien connues.*
- Un deuxième exercice un peu plus difficile sur les espaces vectoriels (notamment avec des espaces de polynômes) sera proposé ensuite.
- S'il reste du temps, un dernier exercice portera sur le calcul matriciel.

  Le cours sera considéré comme connu dès que :
  - *La méthode d'inversion de matrices par la méthode de Gauss-Jordan est bien connue (et respectée à la lettre, sans fractions sauf éventuellement à la toute dernière étape).*
  - *Les calculs basiques de matrices (somme, produit, transposition) sont bien maitrisés.*
  - *La formule théorique (avec une somme) donnant les coefficients d'un produit de matrices est connue.*
  - *La formule du binôme de Newton est connue.*
  - *L'utilisation de polynômes annulateurs pour déterminer les puissances successives ou des inverses de matrices est connue.*

Prévisions pour la semaine 22 : chapitres 17, 18, 19, 20 et 21 (applications linéaires)

1. En montrant que c'est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel connu.
2. Sous la forme $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,|\, ax+by+cz=0\}$.

Détails des chapitres au programme

Chapitre 17 - Polynômes

cf. programme de la semaine 19.

Chapitre 18 - Systèmes linéaires

cf. programme de la semaine 18.

Chapitre 19 - Calcul matriciel

cf. programme de la semaine 19.

Chapitre 20 - Introduction aux espaces vectoriels

- Notion d'espace vectoriel.
  - Définitions et premières propriétés.
  - Exemples usuels. Définition de l'addition et de la multiplication externe sur $\mathbb{R}^n$ et sur $\mathcal{F}(A, E)$ où A est un ensemble quelconque et E un espace vectoriel. Les ensembles $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{F}(A, E)$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}[X]$ sont des espaces vectoriels.
  - Famille finie de vecteurs. Combinaisons linéaires de vecteurs.
- Sous-espaces vectoriels
  - Définitions équivalentes. Si E est un espace vectoriel et F un s.e.v de E, alors F est un espace vectoriel.
  - Exemples de sous-espaces vectoriels : $C(I, \mathbb{R})$, $D^1(I, \mathbb{R})$, $C^1(I, \mathbb{R})$, $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$, $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}_n[X]$, $\{P \in \mathbb{R}[X] \mid A|P\}$, $\{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(a) = 0\}$.
  - Intersection de sous-espaces vectoriels.
  - Sous-espace engendré par une famille finie de vecteurs. Caractérisation de $\mathrm{Vect}(x_1, \cdots, x_n)$. Opérations élémentaires sur les vecteurs de $\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$.
- Familles libres, génératrices et bases
  - Familles génératrices.
  - Familles liées, familles libres. Vecteurs colinéaires. Une sous famille d'une famille libre est libre. Une famille de polynômes échelonnée en degré est libre.
  - Bases. Coordonnées d'un vecteur dans une base. Matrice colonne des coordonnées. Bases canoniques de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}_n[X]$.