Programme de colles - Semaine n° 19

du 5 au 11 février 2024

Cette semaine, les colles de Mathématiques portent sur les chapitres suivants (voir au dos pour plus de détails) :

17 – Polynômes

18 – Systèmes linéaires

19 – Calcul matriciel

- La colle commencera par la résolution d'un système linéaire à n équations et p inconnues (avec n et p choisis par l'examinateur entre 3 et 4) à coefficients entiers OU BIEN l'inversion d'une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ par la méthode de Gauss-Jordan.

  Le cours sera considéré comme connu dès que la méthode du pivot de Gauss est appliquée à la lettre. Plus précisément :

  — *Pour les systèmes : aucune substitution n'est possible dans la première étape (celle consistant à se ramener à un système triangulaire).*

  — *Pour les systèmes : Une fois le système ramené sous forme triangulaire, des remontées successives sont autorisées même s'il est préférable de continuer avec un pivot de Gauss remontant.*

  — *Pour les systèmes et les matrices : il ne peut y avoir aucun échange « gratuit » de lignes (on le fait dans le seul et unique but de se ramener à un pivot non nul).*

  — *Pour les systèmes et les matrices : aucune fraction n'interviendra sauf éventuellement à l'ultime étape.*

- Un deuxième exercice consistera à factoriser un polynôme de degré supérieur ou égal à 3.

  Le cours sera considéré comme connu dès que :

  — *on pense à chercher une racine évidente (-2, -1, 1, 0, 1 ou 2) puis sa multiplicité en utilisant le critère des dérivées successives.*

  — *la méthode de la division euclidienne est parfaitement connue.*

  — *la factorisation finale proposée consiste en un produit de polynômes de degré 1 ou de degré 2 à discriminant strictement négatif.*

- S'il reste du temps, un exercice de calcul matriciel (hors calcul d'inverse avec méthode de Gauss-Jordan) ou bien un autre exercice sur les polynômes pourra être proposé.

  Le cours sera considéré comme connu dès que :

  — *Pour les matrices :*

  * *Les calculs basiques de matrices (somme, produit, transposition) sont bien maitrisés.*
  * *La formule théorique (avec une somme) donnant les coefficients d'un produit de matrices est connue.*
  * *La formule du binôme de Newton est connue.*
  * *L'utilisation de polynômes annulateurs pour déterminer les puissances successives ou des inverses de matrices est connue.*

  — *Pour les polynômes (en plus du point précédent) :*

  * *Le fait qu'un polynôme non nul de degré n admet au plus n racines est bien connu.*
  * *Le fait que, tout polynôme de degré au plus n admettant plus de $n+1$ racines (ou une infinité si on ne sait pas que son degré est majoré par n) est le polynôme nul.*

Prévisions pour la semaine 20 (après les vacances) : chapitres 17, 18, 19.

Détails des chapitres au programme

Chapitre 17 - Polynômes

- Ensemble $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels
  - — Les polynômes sont définis en tant qu'applications polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Si $k \in \mathbb{N}$, X^k désigne l'application $x \in \mathbb{R} \longmapsto x^k \in \mathbb{R}$. La notation $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ n'est pas unique mais les coefficients de P sont uniquement déterminés. Monôme. Degré d'un polynôme. Notation $\mathbb{R}_n[X]$.
  - — Opérations algébriques. Degré et coefficient dominant de $P+Q$, λP, PQ, $P \circ Q$ et P' lorsque $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Intégrité de $\mathbb{R}[X]$. Polynômes inversibles.
  - — Dérivation d'un polynôme. Dérivées successives. Formule de Taylor pour les polynômes.
- Division euclidienne de polynômes
  - — Théorème de la division euclidienne. Méthode algorithmique.
  - — Diviseurs et multiples dans $\mathbb{R}[X]$.
- Racines d'un polynôme et factorisation
  - — a est une racine de $P \in \mathbb{R}[X]$ si et seulement si il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ (unique) tel que $P = (X-a)Q$.
  - — Nombre maximal de racine distinctes. Critères sur les racines pour être le polynôme nul. Critères d'égalité de polynôme qui coïncident en des valeurs.
  - — Factorisation d'un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}^*$ admettant n racines distinctes deux à deux.
  - — Ordre de multiplicité d'une racine. Critères de factorisation. Critères avec les dérivées successives.
  - — Factorisation d'un polynôme de degré 2. Tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré impair admet une racine réelle. Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ (tout polynôme non constant de $\mathbb{R}[X]$ s'écrit comme produit de polynômes de degré 1 et de polynômes de degré 2 de discriminant strictement négatif). Cas des polynômes du type $aX^4 + bX^2 + c$.

Chapitre 18 - Systèmes linéaires

cf. programme de la semaine 18.

Chapitre 19 - Calcul matriciel

- Ensemble de matrices
  - — Ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Matrices lignes, colonnes. Matrice nulle. Matrices élémentaires.
  - — Somme de matrices, multiplication par un scalaire. Premières propriétés.
  - — Produit matriciel. Associativité. Distributivité par rapport au produit. $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ n'est pas intègre. Produit d'une matrice par une vecteur colonne. Matrice associée à un système linéaire.
  - — Transposée d'une matrice. Transposition d'un produit.
- Matrices carrées
  - — Ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Matrice nulle O_n. Matrice identité I_n. Le produit n'est pas commutatif. Matrices qui commutent. Matrices diagonales, triangulaires supérieures et inférieures, symétriques, antisymétriques.
  - — Puissances de matrices carrées. Formule du binôme de Newton pour deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent. Polynômes de matrices carrées. Notion de polynôme annulateur. Application au calcul des puissances successives d'une matrice carrée.
- Matrices inversibles
  - — Ensemble $GL_n(\mathbb{R})$. Unicité de l'inverse. Inverse d'un produit de matrices inversibles, de la transposée, d'une puissance d'une matrice inversible.
  - — Critères d'inversibilité (admis pour le moment) : une matrice inversible à gauche (resp. à droite) est inversible. Lien avec les systèmes de Cramer.
  - — Critère d'inversibilité des matrices triangulaires et diagonales. Calcul de l'inverse d'une matrice : cas des matrices d'ordre 2, utilisation des polynômes annulateurs, méthode de Gauss-Jordan.