

Programme de colles - Semaine n° 17

du 22 au 28 janvier 2024

Cette semaine, les colles de Mathématiques portent sur les chapitres suivants (voir au dos pour plus de détails) :

15 – Dérivation

16 – Intégration sur un segment

- La colle commencera par un ou deux exercices de calcul d'intégrales ou de primitives en utilisant des intégrales.

Le cours sera considéré comme connu dès que :

- Les primitives usuelles sont bien connues.
- Le théorème fondamental de l'analyse est bien connu : une primitive sur un intervalle I d'une fonction f continue sur I est donnée par la formule

$$x \mapsto \int_{x_0}^x f(t) dt,$$

où x_0 est choisi arbitrairement dans I .

- La formule d'intégration par parties est bien connue. Attention à l'hypothèse C^1 .
 - La formule de changement de variables¹ est bien connue (sauf rares exceptions, on exprime systématiquement l'ancienne variable en fonction de la nouvelle). Attention à l'hypothèse C^1 .
 - La dérivation de fonctions définies par une intégrale dont les bornes varient est connue.
 - Le théorème de convergence des sommes de Riemann est connu. Attention à l'hypothèse de continuité.
- Un deuxième exercice pourra porter sur le chapitre de dérivation.

Le cours sera considéré comme connu dès que :

- Les dérivées usuelles sont connues, ainsi que les formules de dérivation des opérations algébriques, de la composée et de la réciproque.
- Le théorème de prolongement de la dérivée est connue (attention ce n'est pas une condition nécessaire : s'il n'y a pas de limite finie, il faut revenir au taux d'accroissement).
- Le théorème de Rolle, le TAF et les IAF sont connues à la perfection (attention aux hypothèses).
- La démonstration de l'existence et unicité d'un point fixe est parfaitement maîtrisée (immense classique).
- L'utilisation des IAF pour obtenir une inégalité du type $|u_{n+1} - \alpha| \leq M|u_n - \alpha|$ (lorsque $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite récurrente et α un point fixe de la relation de récurrence) est connue.
- Le passage (à l'aide d'une récurrence) de

$$(\forall n \geq n_0, |u_{n+1} - \alpha| \leq M|u_n - \alpha|) \quad \text{à} \quad (\forall n \geq n_0, |u_n - \alpha| \leq M^{n-n_0}|u_{n_0} - \alpha|)$$

est connu spontanément.

- La méthode de détermination d'une valeur de n telle que u_n est une approximation de α à une précision donnée est connue.

Prévisions pour la semaine 18 : chapitres 16 et 18 (systèmes linéaires)

1. Tout changement de variable non affine doit être indiqué par l'examinateur, conformément au programme.

Détails des chapitres au programme

Chapitre 15 - Dérivation

cf. programme de la semaine 16.

Chapitre 16 - Intégration sur un segment

- Intégrale d'une fonction continue sur un segment
- Primitive d'une fonction sur un intervalle
 - Unicité à une constante près. Unicité de la primitive s'annulant en un certain point.
 - Théorème fondamental de l'analyse. Notation $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.
 - Toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive sur cet intervalle.
 - Primitives usuelles.
- Propriétés des intégrales
 - Relation de Chasles. Linéarité.
 - Positivité (et cas d'une intégrale nulle). Croissance. Inégalité triangulaire.
- Intégration par parties.
- Changement de variables
 - Conformément au programme, tout changement de variable non affine devra être indiqué.
 - Intégrales de fonctions paires et impaires sur un segment centré en 0.
- Étude d'une fonction définie par une intégrale.
- Retour sur les sommes de Riemann
 - Sommes de Riemann à gauche et droite dans le cas des fonctions monotones
 - Convergence des sommes de Riemann dans le cas des fonctions continues.
 - Méthode des rectangles avec Python