Programme de colles - Semaine n° 16

du 15 au 21 janvier 2024

Cette semaine, les colles de Mathématiques portent sur les chapitres suivants (voir au dos pour plus de détails) :

13 – Limites de fonctions

14 – Grands théorèmes de continuité

15 – Dérivation

- La colle commencera par un exercice consistant à montrer qu'une fonction est de classe C^1, éventuellement en la prolongeant par continuité en une borne dans un premier temps.
  Le cours sera considéré comme connu dès que :
  — *Les dérivées usuelles sont connues, ainsi que les formules de dérivation des opérations algébriques, de la composée et de la réciproque.*
  — *Le théorème de prolongement de la dérivée est connue (attention ce n'est pas une condition nécessaire : s'il n'y a pas de limite finie, il faut revenir au taux d'accroissement).*
- Un deuxième exercice pourra porter sur une application du théorème (ou des inégalités) des accroissements finis, comme par exemple l'étude d'une suite récurrente (avec éventuellement un programme Python dans ce cas).
  Le cours sera considéré comme connu dès que :
  — *Le théorème de Rolle, le TAF et les IAF sont connues à la perfection (attention aux hypothèses).*
  — *La démonstration de l'existence et unicité d'un point fixe est parfaitement maitrisée (immense classique).*
  — *L'utilisation des IAF pour obtenir une inégalité du type* $|u_{n+1}-\alpha| \leqslant M|u_n-\alpha|$ *(lorsque* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite récurrente et* α *un point fixe de la relation de récurrence) est connue.*
  — *Le passage (à l'aide d'une récurrence) de*
  $$(\forall n \geqslant n_0,\ |u_{n+1}-\alpha| \leqslant M|u_n-\alpha|) \qquad \text{à} \qquad (\forall n \geqslant n_0,\ |u_n-\alpha| \leqslant M^{n-n_0}|u_{n_0}-\alpha|)$$
  est connu spontanément.
  — *La méthode de détermination d'une valeur de* n *telle que* u_n *est une approximation de* α *à une précision donnée est connue.*
- S'il reste du temps, un autre exercice de dérivabilité ou bien un exercice sur les grands théorèmes de continuité pourra être proposé.
  Le cours sera considéré comme connu dès que :
  — *Le TVI, le théorème de la bijection et le théorème des bornes atteintes sont parfaitement connues.*
  — *Les propriétés de la fonction* Arctan *sont bien connues.*

Prévisions pour la semaine 17 : chapitres 15 et 16 (intégration sur un segment)

Détails des chapitres au programme

Chapitre 13 - Limites de fonctions

cf. programme de la semaine 13.

Chapitre 14 - Grands théorèmes de continuité

- Théorème des valeurs intermédiaires.
  - *TVI version 1 :* Si f est continue sur $[a; b]$ et si t est un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors il existe $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = t$.
  - *TVI version 2 :* Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Notons

    $$M = \begin{cases} \sup\limits_{x \in I} f(x) & \text{si } f \text{ est majorée,} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad m = \begin{cases} \inf\limits_{x \in I} f(x) & \text{si } f \text{ est minorée,} \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

    Si f est continue sur I et si $t \in]m\,; M[$, alors il existe $c \in I$ tel que $f(c) = t$.
  - *TVI version 1 bis :* Si f est continue sur $]a\,; b[$ et si t est un réel compris entre $\lim\limits_{a} f$ et $\lim\limits_{b} f$, alors il existe $c \in]a\,; b[$ tel que $f(c) = t$.
  - *TVI version 3 :* L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.
  - Méthode de preuve par dichotomie.
  - Application à la recherche de points fixes.
- Le théorème de la bijection.
  - Si f est continue et strictement monotone sur l'intervalle I alors f réalise une bijection de I sur l'intervalle $f(I)$. De plus la réciproque f^{-1} est continue sur $f(I)$ et strictement monotone sur $f(I)$ de même sens de monotonie que f.
  - Forme de $f(I)$ lorsque f est monotone et continue sur I.
  - Fonction Arctan (définition, monotonie, limites, continuité, parité, courbe représentative).
  - Application à l'étude des suites implicites
- Le théorème des bornes atteintes.
  - Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.
  - L'image d'un segment par une fonction continue est un segment. Plus précisément, si $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue sur $[a; b]$, alors $f([a; b]) = [m; M]$ où $m = \min\limits_{[a;b]} f$ et $M = \max\limits_{[a;b]} f$.

Chapitre 15 - Dérivation

- Fonction dérivable en un point.
  - Taux d'accroissement. Dérivée. Tangente à la courbe. Tangente verticale.
  - La dérivabilité implique la continuité.
  - Dérivée à droite et à gauche. Notion de demi-tangente.
  - Opérations algébriques sur les fonctions dérivables en un point. Dérivée d'une composée. Dérivée de la réciproque d'une bijection.
- Fonctions dérivées.
  - Fonction dérivable et fonction dérivée. Notation $D^1(I, \mathbb{R})$. Fonction de classe C^1. Notation $C^1(I, \mathbb{R})$.
  - Dérivation des fonctions usuelles, dont Arctan.
- Accroissements finis.
  - Extremum local et dérivée. Théorème de Rolle.
  - Théorème des accroissements finis. Inégalités des accroissements finis.
  - Théorème de prolongement de la dérivée.

— Application à l'étude de suites récurrentes.

- Variations des fonctions dérivables.
  — Lien entre variation d'une fonction dérivable sur un intervalle et le signe de sa dérivée. Cas d'une dérivée identiquement nulle.
  — Si f est dérivable sur un intervalle I et $f'(x) > 0$ pour tout x dans I, sauf éventuellement en un nombre fini d'entre eux, alors f est strictement croissante sur I.
- Retour sur les fonctions exponentielles et logarithme népérien
  — Unicité (existence admise) et propriétés de la fonction exponentielle.
  — Existence, unicité et propriétés de la fonction logarithme.