

Programme de colles - Semaine n° 13

du 12 au 18 décembre 2023

Cette semaine, les colles de Mathématiques portent sur les chapitres suivants (voir au dos pour plus de détails) :

- 10 – Éléments de combinatoire
- 11 – Probabilités sur un univers fini
- 12 – Variables aléatoires réelles finies
- 13 – Limites de fonctions

- La colle commencera par un calcul d'une limite de fonctions.

Le cours sera considéré comme connu dès que :

- *Les limites des fonctions usuelles (dont les propriétés de continuité) et les opérations algébriques et de composition sur les limites sont connues.*
- *On pense bien à factoriser par le terme le plus gros quand il y a une somme.*
- *Les croissances comparées du cours sont connues¹*
- *Les équivalents usuels sont connus².*
- *Les liens entre limites et limites à gauche/droite sont connues.*

- La suite de la colle consistera en des exercices de probabilités finies **avec** variables aléatoires. Les exercices pourront être accompagnés par une modélisation de l'expérience aléatoire avec Python.

Le cours sera considéré comme connu dès que :

- *Si c'est demandé explicitement ou si tous les résultats de l'expérience sont équiprobables, on introduit l'univers Ω , on sait donner le cardinal de Ω (on ne confond pas Ω et son cardinal) et on utilise la formule $\mathbb{P}(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$. Sinon on se dirige vers une description ensembliste des événements³. Il est attendu que la différence entre intersection et union soit comprise.*
- *La formule des probabilités composées, la formule des probabilités totales⁴, la formule de Bayes sont parfaitement connues.*
- *Les notions d'incompatibilité et d'indépendance sont bien citées quand il le faut et non confondues.*
- *Les formules et les propriétés des lois usuelles sont connues. L'hypothèse d'indépendance est bien utilisée lorsque l'on justifie qu'une variable aléatoire suit une loi binomiale.*

Il n'y a pas de colles les semaines 14 et 15. Prévisions pour la semaine 16 chapitres 14 (Grands théorèmes de continuité), 15 (Dérivation), 16 (Intégration sur un segment)

1. Il faut impérativement se ramener à celles du cours via compositions. Par exemple $x^2 e^{-\sqrt{x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ n'est pas directement une « croissance comparée du cours ». Pour montrer cela, on dit que $\sqrt{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ et $y^4 e^{-y} \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} 0$ par croissances comparées.

2. A ce stade de l'année, seules les propriétés de compatibilité des équivalents avec le produit, le quotient et l'élévation à la puissance ont été vues. Quand il y a une somme, on factorise par le terme dominant.

3. L'examineur pourra aider à l'introduction d'événements simples permettant de construire les événements dont on veut calculer la probabilité.

4. On précise bien le système complet d'événement et on écrit toute la formule AVANT de se rendre compte que certaines probabilités conditionnelles de la formules sont nulles.

Détails des chapitres au programme

Chapitre 10 - Éléments de combinatoire

cf. programme de la semaine 10.

Chapitre 11 - Probabilités sur un univers fini

cf. programme de la semaine 11.

Chapitre 12 - Variables aléatoires réelles finies

cf. programme de la semaine 12.

Chapitre 13 - Limites de fonctions

- Limites et continuité
 - Notion de voisinage. Limite finie en un point. Unicité de la limite. Limites finie à gauche et à droite.
 - Continuité en un point, continuité à gauche/droite. Prolongement par continuité. Continuité sur un intervalle.
 - Limite infinie à gauche et à droite.
 - Limites finies ou infinies en $\pm\infty$.
- Propriétés générales
 - Image d'une suite convergente vers $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ par une fonction admettant une limite en ℓ . Image d'une suite convergente par une fonction continue. Limite et continuité d'une fonction composée.
 - Limites et relation d'ordre. Théorèmes d'encadrement.
 - Opérations algébriques sur les limites et sur les fonctions continues.
- Théorème de la limite monotone pour les fonctions.
- Asymptotes et branches paraboliques.
- Limites et continuité en un point des fonctions usuelles.
- Croissances comparées.
- Fonctions négligeables, Fonctions équivalentes
 - Fonction négligeable devant une autre. Réécriture des croissances comparées. Propriétés (transitivité, produit, multiplication par une constante non nulle). Somme de mêmes petits o.
 - Suites équivalents. Propriétés (réflexivité, symétrie, transitivité, produit, quotient, puissances FIXES).
 - Équivalents usuels : si $u(t) \xrightarrow[t \rightarrow a]{} 0$ alors $\ln(1 + u(t)) \underset{a}{\sim} u(t)$, $e^{u(t)} \underset{a}{\sim} 1$, $e^{u(t)} - 1 \underset{a}{\sim} u(t)$, si $\alpha \in \mathbb{R}^*$,
 $(1 + u(t))^\alpha - 1 \underset{a}{\sim} \alpha u(t)$, $\cos(u(t)) \underset{a}{\sim} 1$, $1 - \cos(u(t)) \underset{a}{\sim} \frac{u(t)^2}{2}$, $\sin(u(t)) \underset{a}{\sim} u(t)$, $\tan(u(t)) \underset{a}{\sim} u(t)$.
 - Équivalents d'un polynôme en 0, en $\pm\infty$.