Programme de colles - Semaine n° 12

du 5 au 11 décembre 2023

Cette semaine, les colles de Mathématiques portent sur les chapitres suivants (voir au dos pour plus de détails) :

10 – Éléments de combinatoire

11 – Probabilités sur un univers fini

12 – Variables aléatoires réelles finies

La colle consistera en des exercices de probabilités finies **avec** variables aléatoires. Les exercices pourront être accompagnées par une modélisation de l'expérience aléatoire avec Python.
Le cours sera considéré comme connu dès que :

— *Si c'est demandé explicitement ou si tous les résultats de l'expérience sont équiprobables, on introduit l'univers*[1] Ω*, on sait donner le cardinal de* Ω *(on ne confond pas* Ω *et son cardinal) et on utilise la formule* $\mathbb{P}(A) = \frac{\mathrm{card}(A)}{\mathrm{card}(\Omega)}$*. Sinon on se dirige vers une description ensembliste des événements*[2]*. Il est attendu que la différence entre intersection et union soit comprise.*

— *La formule des probabilités composées, la formule des probabilités totales*[3]*, la formule de Bayes sont parfaitement connues.*

— *Les notions d'incompatibilité et d'indépendance sont bien citées quand il le faut et non confondues.*

— *Les formules et les propriétés des lois usuelles sont connues. L'hypothèse d'indépendance est bien utilisée lorsque l'on justifie qu'une variable aléatoire suit une loi binomiale.*

Prévisions pour la semaine 13 : chapitres 10, 11, 12 et 13 (limites de fonctions)

1. Ω est tout simplement l'ensemble des résultats possibles de l'expérience. En général :

— Si l'expérience peut-être vue comme des tirages successifs avec remise de p éléments dans un ensemble E à n éléments, on prend $\Omega = E^p$. Alors $\mathrm{card}(\Omega) = n^p$.

— Si l'expérience peut-être vue comme des tirages successifs sans remise de p éléments dans un ensemble E à n éléments, on prend Ω, l'ensemble des p-uplets d'éléments distincts de E. Alors $\mathrm{card}(\Omega) = \frac{n!}{(n-p)!}$.

— Si l'expérience peut-être vue comme un tirage simultané de p éléments dans un ensemble E à n éléments, on prend Ω, l'ensemble des combinaisons de p d'éléments de E. Alors $\mathrm{card}(\Omega) = \binom{n}{p}$.

2. L'examinateur pourra aider à l'introduction d'événements simples permettant de construire les événements dont on veut calculer la probabilité.

3. On précise bien le système complet d'événement et on écrit toute la formule AVANT de se rendre compte que certaines probabilités conditionnelles de la formules sont nulles.

Détails des chapitres au programme

Chapitre 10 - Éléments de combinatoire

cf. programme de la semaine 10.

Chapitre 11 - Probabilités sur un univers fini

cf. programme de la semaine 11.

Chapitre 12 - Variables aléatoires réelles finies

- Variable aléatoire réelle finie X sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.
  - Univers image $X(\Omega)$. Notations $[X = x]$, $[X \leqslant x]$, etc. Système complet associé à une variable aléatoire réelle finie.
  - Loi d'une variable aléatoire réelle finie. Existence de variable aléatoire réelle finie de loi donnée. Calcul de $\mathbb{P}(X \leqslant k)$. Formule $\mathbb{P}(X = k) = P(X \leqslant k) - \mathbb{P}(X \leqslant k-1)$ et ses analogues.
  - Transfert de variable aléatoire réelle finie. Pas de formule général mais cas particuliers des lois de $aX + b$, X^2, $|X|$, $1/\sqrt{X}$, etc.
- Espérance et variance d'une variable aléatoire réelle finie
  - Propriétés de positivité et croissance. Linéarité de l'espérance. Notion de variable centrée.
  - Théorème de transfert.
  - Variance et écart-type. Formule de Koenig-Huygens. $\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X)$ pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Notion de variable aléatoire réelle finie centrée réduite.
- Lois usuelles
  - Loi certaine.
  - Loi uniforme sur une partie finie A de $\mathbb{R}$. Notation $\mathcal{U}(A)$. Espérance et variance dans le cas où $A = [\![1, n]\!]$ avec n un entier naturel non nul. Espérance et variance dans le cas où $A = [\![a, b]\!]$ avec a et b des entiers tels que $a < b$. Simulation avec Python.
  - Loi de Bernoulli de paramètre $p \in \,]0\,;1[$. Notation $\mathcal{B}(p)$. Espérance et variance. Simulation avec Python.
  - Loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \,]0\,;1[$. Notation $\mathcal{B}(n, p)$. Lien avec le nombre de succès dans n répétitions indépendantes d'une épreuve de Bernoulli de paramètre p. Espérance et variance. Simulation avec Python.