Programme de colles - Semaine n° 11

du 27 novembre au 4 décembre 2023

Cette semaine, les colles de Mathématiques portent sur les chapitres suivants (voir au dos pour plus de détails) :

10 – Éléments de combinatoire

11 – Probabilités sur un univers fini

La colle consistera en des exercices de probabilités finies sans utiliser de variables aléatoires. Les exercices pourront éventuellement être accompagnées par une modélisation de l'expérience aléatoire avec Python.
Le cours sera considéré comme connu dès que :

— *Si c'est demandé explicitement ou si tous les résultats de l'expérience sont équiprobables, on introduit l'univers*[1] Ω*, on sait donner le cardinal de* Ω *(on ne confond pas* Ω *et son cardinal) et on utilise la formule* $\mathbb{P}(A) = \frac{\mathrm{card}(A)}{\mathrm{card}(\Omega)}$*. Sinon on se dirige vers une description ensembliste des événements*[2]*. Il est attendu que la différence entre intersection et union soit comprise.*

— *La formule des probabilités composées, la formule des probabilités totales*[3]*, la formule de Bayes sont parfaitement connues.*

— *Les notions d'incompatibilité et d'indépendance sont bien citées quand il le faut et non confondues.*

Prévisions pour la semaine 12 : chapitres 10, 11 et 12 (variables aléatoires réelles finies).

1. Ω est tout simplement l'ensemble des résultats possibles de l'expérience. En général :

— Si l'expérience peut-être vue comme des tirages successifs avec remise de p éléments dans un ensemble E à n éléments, on prend $\Omega = E^p$. Alors $\mathrm{card}(\Omega) = n^p$.

— Si l'expérience peut-être vue comme des tirages successifs sans remise de p éléments dans un ensemble E à n éléments, on prend Ω, l'ensemble des p-uplets d'éléments distincts de E. Alors $\mathrm{card}(\Omega) = \frac{n!}{(n-p)!}$.

— Si l'expérience peut-être vue comme un tirage simultané de p éléments dans un ensemble E à n éléments, on prend Ω, l'ensemble des combinaisons de p d'éléments de E. Alors $\mathrm{card}(\Omega) = \binom{n}{p}$.

2. L'examinateur pourra aider à l'introduction d'événements simples permettant de construire les événements dont on veut calculer la probabilité.

3. On précise bien le système complet d'événement et on écrit toute la formule AVANT de se rendre compte que certaines probabilités conditionnelles de la formules sont nulles.

Détails des chapitres au programme

Chapitre 10 - Éléments de combinatoire

cf. programme de la semaine 10.

Chapitre 9 - Probabilités sur un univers fini

- Espaces probabilisés finis
  - Expérience aléatoire. Notions d'univers et d'événements. Événements incompatibles. Espaces probabilisables finis $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$
  - Opérations sur les événements. Système complet (fini) d'événements.
  - Probabilité sur un espace probabilisable fini. Espaces probabilisés finis $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$. Premières propriétés. Additivité finie. Formule de Poincaré (ou du crible) pour deux ou trois événements.
  - Probabilités et systèmes complet d'événements. Formule des probabilités totales (première version). Une probabilité sur un espace probabilisable fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est entièrement déterminée par la donnée des probabilités des événements élémentaires.
  - Théorème de construction d'une probabilité. Cas d'équiprobabilité. Exemple du problème des anniversaires.
  - Utilisation de Python : choix uniforme (avec une commande du type `rd.randint(1,n+1)`), choix binaire (avec des commandes du type `rd.randint(1,b+1)<=a` ou `rd.random()<p`).
- Probabilité conditionnelle
  - La probabilité conditionnelle sachant un événement de probabilité non nul est une probabilité.
  - Formule des probabilités composées. Formule des probabilités totales (deuxième version). Formule de Bayes.
- Indépendance
  - Indépendance de deux événements. Lien avec les probabilités conditionnelles.
  - Famille finie d'événements mutuellement indépendants.