Programme de colles - Semaine n° 10

du 20 au 26 novembre 2023

Cette semaine, les colles de Mathématiques portent sur les chapitres suivants (voir au dos pour plus de détails) :

9 – Ensembles et applications

10 – Éléments de combinatoire

- La colle commencera par un exercice de combinatoire.

  Le cours sera considéré comme connu dès que :

  — *Les principes additifs et multiplicatifs sont connus et non confondus.*

  — *Les dénombrements usuels du cours sont connus (le nombre de p-uplets d'éléments d'un ensemble E à n éléments, le nombre de p-uplets d'éléments distincts de E, le nombre de parties de E, le nombre de façon d'ordonner E, le nombre de combinaisons de p éléments de E).*

- Un deuxième consistera à montrer une égalité d'ensembles ou montrer qu'une application est injective, surjective et/ou bijective.

  Le cours sera considéré comme connu dès que :

  — *Les définitions (en terme d'antécédents et quantifiées) d'une fonction injective/surjective/bijective sont connues.*

  — *Pour montrer qu'une fonction f est injective de E dans F, on commence bien par écrire « Soient x et x' dans E tels que $f(x) = f(x')$. (Montrons que $x = x'$) » ou bien « Soient x et x' dans E tels que $x \neq x'$. (Montrons que $f(x) \neq f(x')$) ».*

  — *Pour montrer qu'une fonction f est surjective de E dans F, on commence bien par écrire « Soit $y \in F$ ».*

  — *Dans le cas de figure où on connait explicitement la fonction f et que l'on veut montrer que c'est une bijection, on peut se donner x dans E et y dans F, écrire $y = f(x)$ et se ramène à quelque chose de la forme $x = g(y)$ via des équivalents. On conclut alors que f est bijective de E dans F et on dit que g est la réciproque.*

  — *Pour montrer que $A \subset B$, on écrit « Soit $x \in A$ (Montrons que $x \in B$) ».*

  — *L'équivalence entre $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$ et « il existe $i \in I$ tel que $x \in A_i$ » est connue.*

  — *L'équivalence entre $x \in \bigcap_{i\in I} A_i$ et « pour tout $i \in I$ tel que $x \in A_i$ » est connue.*

  — *Les propriétés de distributivité, les lois de Morgan sont connues.*

- Un troisième exercice pourra consister en des calculs de sommes faisant intervenir la formule du binôme de Newton.

Prévisions pour la semaine 11 : chapitres 10 et 11 (probabilités sur un univers fini).

Détails des chapitres au programme

Chapitre 9 - Ensembles et applications

cf. programme de la semaine 9.

Chapitre 10 - Éléments de combinatoire

- Cardinal d'un ensemble fini
  - Définition intuitive. Définition avec la bijection (cela revient à écrire E sous la forme $\{x_1, \ldots, x_n\}$, avec n le cardinal de E et $x_1, \ldots, x_n$ distincts).
  - Un ensemble en bijection avec un ensemble fini est fini et a le même cardinal. Le cardinal d'une partie d'un ensemble E est inférieur au cardinal de E. Cas d'égalité.
- Principes de dénombrement
  - Cardinal de l'union disjointe d'une famille finie de parties. Principe additif. Cardinal du complémentaire. Formule de Poincaré pour deux ensembles finis.
  - Principe multiplicatif. Cardinal du produit cartésien d'une famille finie de parties. Nombre de p-uplets d'éléments d'un ensemble fini. Nombre de p-uplets d'éléments distincts d'un ensemble fini. Nombre de façons d'ordonner les éléments d'un ensemble fini. Nombre de parties d'un ensemble fini.
- Combinaisons
  - Combinaisons de p éléments d'un ensemble E de cardinal n (parties de E à p). Il y en a $\binom{n}{p}$. Lien avec les façons de choisir p éléments parmi n éléments, sans ordre. Lien avec les chemins sur les arbres binaires.
  - Retour sur les propriétés des coefficients binomiaux (avec preuves combinatoires). Preuve par récurrence de la formule du binôme de Newton.
- Nombre de tirages successifs avec ou sans remise, de tirages simultanés.