Correction de quelques exercices de la feuille de TD 9

Exercice 1. On considère $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soient A, B, C et D des événements. En utilisant les opérations ensemblistes, décrire les événements suivants :

1) « L'un au moins des événements A, B, C, D est réalisé ».
2) « Tous les événements A, B, C, D sont réalisés ».
3) « Aucun des événements A, B, C, D n'est réalisé ».
4) « B et C ne sont pas réalisés ».
5) « L'un des événements B et D et un seul est réalisé ».
6) « Si A est réalisé, alors B et D sont réalisés ou C n'est pas réalisé ».
7) « Exactement deux événements parmi A, B, C, D sont réalisés ».

Correction :

1) $A \cup B \cup C \cup D$.
2) $A \cap B \cap C \cap D$.
3) $\overline{A \cup B \cup C \cup D}$, c'est-à-dire $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} \cap \overline{D}$
4) $\overline{B} \cap \overline{C}$.
5) $(\overline{B} \cap D) \cup (B \cap \overline{D})$.
6) $A \subset ((B \cap D) \cup \overline{C})$.
7) $(A\cap B\cap\overline{C}\cap\overline{D})\cup(A\cap\overline{B}\cap C\cap\overline{D})\cup(A\cap\overline{B}\cap\overline{C}\cap D)\cup(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C\cap D)\cup(\overline{A}\cap B\cap\overline{C}\cap D)\cup(\overline{A}\cap B\cap C\cap\overline{D})$

Exercice 2. On jette un dé pipé dont les probabilités d'occurrence de $1, 2, 3, 4, 5, 6$ sont respectivement

$$p_1 = \frac{1}{12}, \qquad p_2 = \frac{1}{6}, \qquad p_3 = \frac{1}{12}, \qquad p_4 = \frac{1}{6}, \qquad p_5 = \frac{1}{6}, \qquad p_6 = \frac{1}{3}.$$

1) Construire un espace probabilité $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ fini qui modélise cette expérience aléatoire.
2) Décrire chacun des événements suivants comme des parties de Ω et calculer leurs probabilités :
   a) « Le chiffre est impair ».
   b) « Le chiffre est supérieur à 2 ».
   c) « Le chiffre est impair et inférieur à 4 ».
   d) « Le chiffre est impair ou inférieur à 4 ».

Correction :

1) On se donne $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et on munit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ de la probabilité

$$\mathbb{P} : A \in \mathcal{P}(\Omega) \longmapsto \sum_{i \in A} p_i.$$

Il s'agit bien d'une probabilité car elle est à valeur dans $\mathbb{R}_+$,

$$\mathbb{P}(\Omega) = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = 1$$

(et la propriété d'additivité s'obtient automatiquement par sommation par paquets... pas la peine de le préciser).

2) a) $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\{1, 3, 5\}) = p_1 + p_3 + p_5 = \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{3}$.

   b) $\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(\{1\}) = 1 - p_1 = \dfrac{11}{12}$.

c) $\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(\{1,3\}) = p_1 + p_3 = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$.

d) $\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(\{1,2,3,4,5\}) = 1 - \mathbb{P}(\{6\}) = 1 - p_6 = \frac{2}{3}$.

Exercice 6. Une entreprise réceptionne périodiquement des lots de pièces destinées à des assemblages. Pour contrôler la qualité d'un lot de taille n, elle échantillonne r pièces ($r < n$). En supposant que le lot contienne k pièces défectueuses ($k \leqslant n$), quelle est la probabilité de trouver m pièces défectueuses dans l'échantillon examiné ($m \leqslant r$) ?

Correction : Ici l'espace considéré est l'ensemble des tirages de r pièces dans un lot de n pièces, il est de cardinal $\binom{n}{r}$. On le munit de l'équiprobabilité.
Soit A l'événement "trouver m pièces défectueuses dans l'échantillon examiné". Il y a $\binom{k}{m}\binom{n-k}{r-m}$ façons d'obtenir A. Ainsi

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\dbinom{k}{m}\dbinom{n-k}{r-m}}{\dbinom{n}{r}}.$$

Remarque : la variable aléatoire qui donne le nombre de pièces défectueuses suit la loi hypergéométrique de paramètres n, k et r.

Exercice 7 – Probabilités des mains au poker fermé.

1) Reprendre l'exercice 11 du TD n° 8 et calculer les probabilités de chaque type de main au poker fermé pour des jeux de 32 et 52 cartes. On présentera les résultats dans un tableau.
2) Vérifier que, pour un jeu de 52 cartes, alors l'ordre des probabilités des mains correspond à l'ordre de leurs forces (plus la probabilité est faible, plus la main est forte) mais que ce n'est pas le cas si le jeu ne contient que 32 cartes.

Correction :

1) On considère l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ où Ω est l'ensemble des mains et $\mathbb{P}$ l'équiprobabilité. On divise donc les cardinaux obtenus dans le TD n° 8 par $\mathrm{card}(\Omega) = \binom{4r}{5}$ pour obtenir les probabilités des différentres mains. On obtient le tableau de probabilités suivants (avec des approximations obtenues avec l'aide de Scilab) :

Main	Probabilité ($r = 13$)	Probabilité ($r = 8$)
Quinte flush royale	0,000154 %	0,00199 %
Quinte flush	0,00139 %	0,0060 %
Carré	0,024 %	0,111 %
Full	0,144 %	0,667 %
Couleur	0,197 %	0,103 %
Quinte	0,392 %	2,026 %
Brelan	2,113 %	5,339 %
Double paire	4,754 %	12,013 %
Paire	42,257 %	53,393 %
Carte haute	50,118 %	26,339 %

2) On remarque que, si $r = 13$, alors l'ordre des probabilités des mains correspond à l'ordre de leurs forces. Par contre, si $r = 8$, il est plus probable d'obtenir une paire qu'une carte haute et il est aussi plus probable d'obtenir un carré (et un full) qu'une couleur.

Exercice 8 – Formule du crible. Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. La formule du crible généralise la formule de Poincaré : si $A_1, \ldots, A_n$ sont des événements, alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{J \subset [\![1,n]\!] \\ \mathrm{card}(J)=k}} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right).$$

1) Écrire cette formule pour $n = 4$.

2) En déduire une formule analogue pour $\mathrm{card}(F_1 \cup \dots \cup F_n)$ où $F_1, \dots, F_n$ sont des parties d'un ensemble fini E.

3) Application : Soit $n \in \mathbb{N} \backslash \{0, 1\}$. A l'approche des fêtes de Noël, les élèves de S1B ont décidé de s'offrir des cadeaux selon le protocole suivant : un sac opaque contient les noms de tous les élèves (écrits chacun sur un morceau de papier). Chacun leur tour, les élèves tirent un nom au hasard parmi les noms restants au moment du tirage. Chaque élève devra offrir un cadeau à l'élève dont il a tiré le nom. On cherche à calculer la probabilité qu'aucun élève ne tire son nom.

   a) Déterminer un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ associé à cette expérience aléatoire. On donnera $\mathrm{card}(\Omega)$.

   b) Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, introduisons A_j l'événement « Le $j^{\text{ième}}$ élève tire son nom ». Soient $k \in [\![1, n]\!]$ et J une partie de $[\![1, n]\!]$ de cardinal k. Montrer que

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \frac{(n-k)!}{n!}.$$

   c) En déduire que la probabilité qu'aucun des élèves de la classe ne tire son nom est $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.
   Nous verrons au second semestre que cette probabilité tend vers $\dfrac{1}{e}$ *lorsque* n *tend vers* ∞.

4) *Pour les plus courageux :* montrer la formule du crible (par récurrence).

Correction :

1) Supposons que $n = 4$. La formule devient

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = &\ \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) + \mathbb{P}(A_4) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_4) \\ & - \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) - \mathbb{P}(A_2 \cap A_4) - \mathbb{P}(A_3 \cap A_4) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_4) \\ & + \mathbb{P}(A_1 \cap A_3 \cap A_4) + \mathbb{P}(A_2 \cap A_3 \cap A_4) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)\end{aligned}$$

2) En considérant $\mathbb{P}$ l'équiprobabilité et en multipliant par $\mathrm{card}(\Omega)$, on obtient

$$\mathrm{card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{J \subset [\![1,n]\!] \\ \mathrm{card}(J) = k}} \mathrm{card}\left(\bigcap_{j \in J} F_j\right).$$

3) a) Supposons que les élèves de la classe sont numérotés avec des entiers de 1 à n (par exemple rangés par ordre alphabétique). On code le tirage par une n-liste d'éléments distincts de $[\![1, n]\!]$ de telle sorte que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, l'élève i doit offrir un cadeau à l'élève dont le numéro est le $i^{\text{ième}}$ de la liste. On considère donc Ω l'ensemble des permutations de $[\![1, n]\!]$ (dont le cardinal est $n!$) muni de $\mathcal{P}(\Omega)$ et de l'équiprobabilité.

   b) Soient $k \in [\![1, n]\!]$ et J une partie de $[\![1, n]\!]$ de cardinal k. On a

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \frac{\mathrm{card}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right)}{\mathrm{card}(\Omega)} = \frac{(n-k)!}{n!},$$

   car les éléments de $\displaystyle\bigcap_{j \in J} A_j$ sont les permutations laissant fixe les k éléments de J (que l'on peut voir comme une permutation des $n - k$ éléments n'étant pas dans J).

c) La formule du crible entraîne alors que

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}\right) = 1-\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right) = 1-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\sum_{\substack{J\subset[\![1,n]\!]\\ \mathrm{card}(J)=k}}\frac{(n-k)!}{n!}$$

$$= 1-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{(n-k)!}{n!}\sum_{\substack{J\subset[\![1,n]\!]\\ \mathrm{card}(J)=k}}1$$

$$= 1+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k}\frac{(n-k)!}{n!}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}.$$

4) **A VENIR**

Exercice 13. On dispose d'un circuit composé de de trois composants électroniques A, B et C dont les probabilités de fonctionnement sont respectivement α, β et γ. On suppose les composants sont en état de fonctionnement indépendamment les uns des autres. Quel est la probabilité que le circuit fonctionne :

- lorsque les composants sont montés en série.
- lorsque les composants sont montés en parallèle.
- lorsque A est monté en série avec le sous-circuit constitué de B et C montés en parallèle.

Correction : Notons F l'événement « le circuit fonctionne », F_A l'événement « le composant A fonctionne », F_B l'événement « le composant B fonctionne » et F_C l'événement « le composant C fonctionne ».

1) Si les composants sont montés en série alors le circuit fonctionne si et seulement si les trois composants fonctionnent. Ainsi
$$\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(F_A\cap F_B\cap F_C) = \mathbb{P}(F_A)\mathbb{P}(F_B)\mathbb{P}(F_C) = \alpha\beta\gamma,$$
car les trois circuits sont indépendants.

2) Si les composants sont montés en parallèle alors le circuit fonctionne si et seulement si au moins un des trois composants fonctionne. Ainsi
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(F) &= \mathbb{P}(F_A\cup F_B\cup F_C) = 1-\mathbb{P}(\overline{F_A\cup F_B\cup F_C}) = \mathbb{P}(\overline{F_A}\cap\overline{F_B}\cap\overline{F_C})\\ &1-\mathbb{P}(\overline{F_A})\mathbb{P}(\overline{F_B})\mathbb{P}(\overline{F_C})\\ &= 1-(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma),\end{aligned}$$
où on a utilisé le fait que les trois circuits sont indépendants à l'avant dernière ligne.

3) Si A est monté en série avec le sous-circuit constitué de B et C montés en parallèle, alors le circuit fonctionne si A fonctionne et si le sous circuit fonctionne (qui lui fonctionne si l'un au moins fonctionne). Ainsi
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(F) &= \mathbb{P}(F_A\cap(F_B\cup F_C))\\ &= \mathbb{P}(F_A)\mathbb{P}(F_B\cup F_C)\\ &= \mathbb{P}(F_A)\big(\mathbb{P}(F_B)+\mathbb{P}(F_C)-\mathbb{P}(F_A\cap F_C)\big)\\ &= \alpha\big(\beta+\gamma-\beta\gamma\big).\end{aligned}$$
où on a utilisé le fait que les trois circuits sont indépendants à la deuxième et la dernière ligne, et la formule de Poincaré à l'avant dernière.

Exercice 14. Les téléviseurs d'un magasin d'électroménager proviennent de deux fournisseurs A et B. Une enquête révèle que 95% (respectivement 99%) des téléviseurs fournies par la société A (respectivement la société B) sont en état de fonctionnement. Elle révèle que un téléviseur sur 48 est abimé lors de la livraison au client. Enfin on sait que la société A fournit 3 fois plus de téléviseurs que la société B. Monsieur Durand vient de se faire livrer un téléviseur défectueux provenant de ce magasin. Quelle est la probabilité que le téléviseur ait été abimé lors de la livraison ? Quelle est la probabilité que le téléviseur ait été fourni déjà défectueux par la société A ?

Correction : Notons F_A l'événement « le téléviseur provient de A », F_B l'événement « le téléviseur provient de B », D l'événement « le téléviseur est défectueux avant la livraison » et L l'événement « le téléviseur est défectueux après la livraison ». On a $\mathbb{P}(F_A) = 3\mathbb{P}(F_B)$ et $\mathbb{P}(F_A)+\mathbb{P}(F_B) = 1$ donc on en déduit que $\mathbb{P}(F_A) = \dfrac{3}{4}$.

- On désire calculer $\mathbb{P}_L(\overline{D})$. La formule de Bayes entraîne que

$$\mathbb{P}_L(\overline{D}) = \frac{\mathbb{P}_{\overline{D}}(L)\mathbb{P}(\overline{D})}{\mathbb{P}(L)}.$$

  Calculons $\mathbb{P}(\overline{D})$. La formule des probabilités totales entraîne que

$$\mathbb{P}(\overline{D}) = \mathbb{P}_{F_A}(\overline{D})\mathbb{P}(F_A) + \mathbb{P}_{F_B}(\overline{D})\mathbb{P}(F_B) = \frac{95}{100}\frac{3}{4} + \frac{99}{100}\frac{1}{4} = \frac{24}{25}$$

  et que

$$\mathbb{P}(L) = \mathbb{P}_D(L)\mathbb{P}(D) + \mathbb{P}_{\overline{D}}(L)\mathbb{P}(\overline{D}) = 1 \cdot \frac{1}{25} + \frac{1}{48}\frac{24}{25} = \frac{3}{50}$$

  Par ailleurs $\mathbb{P}_L(\overline{D}) = \frac{1}{48}$ donc $\mathbb{P}_L(\overline{D}) = \frac{\frac{24}{25} \cdot \frac{1}{48}}{\frac{3}{50}} = \frac{1}{3}$.

- On cherche à calculer $\mathbb{P}_L(F_A \cap D)$. La formule de Bayes entraîne que

$$\mathbb{P}_L(F_A \cap D) = \frac{\mathbb{P}_{F_A \cap D}(L)\mathbb{P}(F_A \cap D)}{\mathbb{P}(L)}.$$

  On a $\mathbb{P}_{F_A \cap D}(L) = 1$, $\mathbb{P}(L) = \frac{3}{50}$ et $\mathbb{P}(F_A \cap D) = \mathbb{P}_{F_A}(D)\mathbb{P}(F_A) = \frac{5}{100}\frac{3}{4} = \frac{3}{80}$. Ainsi

$$\mathbb{P}_L(F_A \cap D) = \frac{1 \cdot \frac{3}{80}}{\frac{3}{50}} = \frac{5}{8}.$$

Exercice 15. Catherine a un garçon atteint de dystrophie musculaire de Duchenne (DMD). Il s'agit d'une maladie due à une mutation récessive liée au sexe, et entraînant un déficit complet de la production de dystrophine. Seuls les hommes porteurs de cette mutation sont atteints, tandis que les femmes sont conductrices. Les femmes conductrices ont un risque de 50% de transmettre l'allèle muté à leur descendance : les fils d'une femme conductrice ont 50% de risque d'être atteints et les filles d'une femme conductrice ont 50 % de risque d'être conductrices. Cependant, le taux de mutation spontanée est élevé : 1/3 des cas de DMD surviennent chez des garçons de mères non porteuses de la mutation. Il existe un test clinique qui est positif avec probabilité 0.7 si une femme est conductrice et positif avec probabilité 0.1 si elle ne l'est pas. Le test de Catherine est positif. Quelle est la probabilité qu'elle soit conductrice ?

Correction : Notons M l'événement « la mère est conductrice » et T l'événement « le test est positif ». Nous cherchons à évaluer $\mathbb{P}_T(M)$. D'après l'énoncé, nous avons

$$\mathbb{P}_M(T) = \frac{7}{10}, \qquad \mathbb{P}(M) = \frac{2}{3} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}_{\overline{M}}(T) = \frac{1}{10}.$$

Nous avons (formule de Bayes)

$$\mathbb{P}_T(M) = \frac{\mathbb{P}(M \cap T)}{\mathbb{P}(T)} = \frac{\mathbb{P}_M(T)\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(T)}.$$

De plus, via la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}(T \cap M) + \mathbb{P}(T \cap \overline{M}) = \mathbb{P}_M(T)\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}_{\overline{M}}(T)(1 - \mathbb{P}(M)).$$

Ainsi

$$\mathbb{P}_T(M) = \frac{\mathbb{P}_M(T)\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}_M(T)\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}_{\overline{M}}(T)(1 - \mathbb{P}(M))}.$$

On obtient

$$\mathbb{P}_T(M) = \frac{\frac{7}{10}\frac{2}{3}}{\frac{7}{10}\frac{2}{3} + \frac{1}{10}\frac{1}{3}} = \frac{14}{15} \approx 0.933.$$

Exercice 16 – Le problème de Monty Hall. Il s'agit d'un casse-tête probabiliste librement inspiré du jeu télévisé américain *Let's Make a Deal*, présenté pendant treize ans par Monty Hall. Voici son énoncé : un candidat est placé devant trois portes. Derrière une des portes se trouve une voiture, derrière les deux autres se trouve une chèvre. Le candidat choisit une des trois portes sans l'ouvrir. L'animateur (qui sait où se trouve la voiture) ouvre l'une des portes restantes derrière laquelle se trouve une chèvre. Le candidat a alors le choix entre conserver la porte initiale ou changer pour prendre la porte fermée restante. Quel choix doit-il faire ?

Correction : Notons A l'événement « Le joueur gagne la voiture » et B l'événement « Le joueur avait choisi la bonne porte ». On $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{3}$. La formule des probabilités totales donne

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_B(A)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}_{\overline{B}}(A)\mathbb{P}(\overline{B}) = \mathbb{P}_B(A)\frac{1}{3} + \mathbb{P}_{\overline{B}}(A)\frac{2}{3}.$$

- Dans la stratégie qui consiste à conserver la porte initiale, le candidat gagne si et seulement $\mathbb{P}_B(A) = 1$ et $\mathbb{P}_{\overline{B}}(A) = 0$. Dans ce cas $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{3}$.
- Dans la stratégie qui consiste à changer de porte, le candidat gagne si et seulement $\mathbb{P}_B(A) = 0$ et $\mathbb{P}_{\overline{B}}(A) = 1$. Dans ce cas $\mathbb{P}(A) = \frac{2}{3}$.

Par conséquent, le candidat a tout intérêt à changer de porte : cela double ses chances de gagner la voiture.

Exercice 17. On dispose d'un sac opaque de billes dont 9 rouges, 5 vertes et 7 bleues. On pioche cinq billes au hasard successivement et sans remise. Calculer la probabilité de piocher

1) uniquement des billes d'une même couleur.
2) uniquement des billes bleues sachant que toutes les billes sont de la même couleur.
3) trois boules d'une couleur et deux d'une autre couleur.
4) au moins une bille de chaque couleur.
5) trois billes rouges sachant que les trois couleurs sont piochées.

Reprendre cet exercice avec des tirages avec remise.

Correction : Le cas des tirages sans remise a été traité en cours. Reprenons l'exercice avec des tirages avec remise :

On considère Ω l'ensemble des tirages de cinq billes avec remise, muni de $\mathcal{P}(\Omega)$ et de $\mathbb{P}$ l'équiprobabilité. Pour tout $i \in [\![1, 5]\!]$, on note $R_i/V_i/B_i$ les événements « piocher rouge/bleue/verte au $i^{\text{ième}}$ tirage ». Il a $9 + 5 + 7 = 21$ billes. Comme les tirages se font avec remise, ils peuvent être considérés comme mutuellement indépendants.

1) Soit C l'événement « tirer uniquement des billes d'une même couleur ». On a

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap R_3 \cap R_4 \cap R_5) + \mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4 \cap B_5) + \mathbb{P}(V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap V_4 \cap V_5).$$

Par indépendance :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(C) &= \mathbb{P}(R_1)\mathbb{P}(R_2)\mathbb{P}(R_3)\mathbb{P}(R_4)\mathbb{P}(R_5) + \cdots \\ &= \frac{9}{21}\frac{9}{21}\frac{9}{21}\frac{9}{21}\frac{9}{21} + \frac{7}{21}\frac{7}{21}\frac{7}{21}\frac{7}{21}\frac{7}{21} + \frac{5}{21}\frac{5}{21}\frac{5}{21}\frac{5}{21}\frac{5}{21} = \left(\frac{9}{21}\right)^5 + \left(\frac{7}{21}\right)^5 + \left(\frac{5}{21}\right)^5 \approx 0,019.\end{aligned}$$

2) La probabilité de tirer uniquement des billes bleues sachant que toutes les billes sont de la même couleur est

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_C(B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4 \cap B_5) &= \frac{\mathbb{P}(C \cap B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4 \cap B_5)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4 \cap B_5)}{\mathbb{P}(C)} \\ &= \frac{\left(\frac{7}{21}\right)^5}{\left(\frac{9}{21}\right)^5 + \left(\frac{7}{21}\right)^5 + \left(\frac{5}{21}\right)^5} = \frac{7^5}{9^5 + 7^5 + 5^5} \approx 0,218.\end{aligned}$$

3) A deux couleurs C_1 et C_2 fixée, il y a $\binom{5}{2} = 10$ façon de faire un tirage de deux boules de la couleur C_1 et trois de la couleur C_2. Notons A_{C_1,C_2} l'événement « tirer deux boules de la couleur C_1 et trois de la couleur C_2 ». Donc, par additivité finie et par indépendance,

$$\mathbb{P}(A_{R,B}) = \frac{\text{card}(A_{R,B})}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\binom{5}{2} \cdot 9^3 \cdot 7^2}{21^5} = 10 \times \frac{9^3 \cdot 7^2}{21^5}$$

$$\mathbb{P}(A_{B,R}) = 10 \times \frac{9^2 \cdot 7^3}{21^5}, \qquad \mathbb{P}(A_{R,V}) = 10 \times \frac{9^3 \cdot 5^2}{21^5}, \qquad \mathbb{P}(A_{V,R}) = 10 \times \frac{9^2 \cdot 5^3}{21^5}$$

$$\mathbb{P}(= A_{V,B}) = 10 \times \frac{7^2 \cdot 5^3}{21^5}, \qquad \mathbb{P}(A_{B,V}) = 10 \times \frac{5^3 \cdot 7^2}{21^5}.$$

Par conséquent

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_{R,B}) + \mathbb{P}(A_{R,V}) + \cdots + \mathbb{P}(A_{B,V}) = \cdots \approx 0,261.$$

4) Notons E l'événement « les trois couleurs ont été piochées ». Notons $F_R/F_B/F_V$ les événements « ne piocher aucune boule rouge/bleue/verte ». On a $\overline{E} = \mathbb{F}_R \cup F_B \cup F_V$. Nous allons utiliser la formule de Poincaré :

$$\mathbb{P}(F_A \cup F_R \cup F_V) = \mathbb{P}(F_R) + \mathbb{P}(F_B) + \mathbb{P}(F_B) - \mathbb{P}(F_R \cap F_B) - \mathbb{P}(F_R \cap F_V) - \mathbb{P}(F_B \cap F_V) + \mathbb{P}(F_R \cap F_B \cap F_V).$$

Nous avons, par indépendance,

$$\mathbb{P}(F_R \cap F_B \cap F_V) = 0, \quad \mathbb{P}(F_R) = \mathbb{P}(\overline{R}_1 \cap \overline{R}_2 \cap \overline{R}_3 \cap \overline{R}_4 \cap \overline{R}_5) = \left(\frac{12}{21}\right)^5, \quad \mathbb{P}(F_B) = \left(\frac{14}{21}\right)^5$$

$$\mathbb{P}(F_V) = \left(\frac{16}{21}\right)^5, \quad \mathbb{P}(F_R \cap F_B) = \left(\frac{5}{21}\right)^5, \quad \mathbb{P}(F_B \cap F_V) = \left(\frac{7}{21}\right)^5, \quad \mathbb{P}(F_R \cap F_V) = \left(\frac{9}{21}\right)^5.$$

On trouve alors

$$\mathbb{P}(\overline{E}) = 1 - \mathbb{P}(E) = 1 - \mathbb{P}(F_R \cup F_B \cup F_V) \approx 0,570.$$

5) Notons D l'événement « tirer trois boules d'une couleur et deux d'une autre couleur ». Il y a $\binom{5}{3}\binom{2}{1}\binom{1}{1} = 20$ façons de faire un tirage de trois billes rouges, une verte et une bleue et chacun de ces tirages possède la même probabilité p égale à $\mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap R_3 \cap V_4 \cap B_5)$. Par additivité finie, on obtient

$$\mathbb{P}(D \cap E) = 20 \times \mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap R_3 \cap V_4 \cap B_5) = 20 \times \left(\frac{9}{21}\right)^3 \frac{7}{21}\frac{5}{21}$$

et donc $\mathbb{P}_E(D) = \dfrac{\mathbb{P}(D \cap E)}{\mathbb{P}(E)} \approx 0,219.$
