Correction de quelques exercices de la feuille de TD 8

Exercice 8. Montrer (avec des arguments combinatoires) que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall p \in [\![0,n]\!], \qquad \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Correction : Remarquons d'abord que, si on choisit $p+1$ éléments distincts parmi $n+1$ alors, le maximum d'entre eux appartient à $[\![p+1,n+1]\!]$.
Pour choisir $p+1$ entiers distincts de $[\![1,n+1]\!]$, on peut d'abord choisir le maximum $k+1 \in [\![p+1,n+1]\!]$ d'entre eux, puis choisir arbitrairement les autres p entiers dans $[\![1,k]\!]$. Le nombre de possibilités est donc

$$\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \cdots + \binom{n}{p}.$$

Pour écrire cette preuve de façon plus rigoureuse on écrit que l'ensemble des combinaisons de $p+1$ éléments de $[\![1,n+1]\!]$ s'écrit comme l'union disjointe des ensembles

$$A_k = \{(a_1,\ldots,a_p,k+1) \in \mathbb{N}^{p+1} : 1 \leqslant a_1 < a_2 < \cdots < a_p < k+1\}, \quad k \in [\![p,n]\!].$$

Exercice 9 – Formule de Vandermonde. Soient p et q deux entiers naturels.

1) En utilisant le fait que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(1+x)^p(1+x)^q = (1+x)^{p+q}$, montrer que

$$\forall r \in [\![0,p+q]\!], \qquad \binom{p+q}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{p}{k}\binom{q}{r-k}.$$

2) Donner une démonstration combinatoire de cette égalité.

Correction :

1) Soit $x \in \mathbb{R}$. La formule du binôme de Newton entraîne que

$$\sum_{k=0}^{p+q} \binom{p+q}{k} x^k = (1+x)^{p+q} = (1+x)^p(1+x)^q = \left(\sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{q} \binom{q}{j} x^j\right).$$

Nous sommes en présence d'un produit de sommes. On peut donc le réécrire sous la forme d'une somme double (cf. formule de développement/factorisation vue en cours) :

$$\sum_{k=0}^{p+q} \binom{p+q}{k} x^k = \sum_{\substack{0 \leqslant i \leqslant p \\ 0 \leqslant j \leqslant q}} \binom{p}{i}\binom{q}{j} x^{i+j}.$$

Soit $r \in [\![0,p+q]\!]$. On remarque que $\binom{p+q}{r}$ est le coefficient du terme de degré r dans le polynôme $\sum_{k=0}^{p+q} \binom{p+q}{k} X^k$. Regardons à présent le coefficient du terme de degré r dans le polynôme $\sum_{\substack{0 \leqslant i \leqslant p \\ 0 \leqslant j \leqslant q}} \binom{p}{i}\binom{q}{j} X^{i+j}$. Dans cette somme double, les termes d'indices (i,j) tels que $X^{i+j} = X^r$ sont tels que $i \in [\![0,p]\!]$ et $j = r-i$. Par conséquent le coefficient du terme de degré r est $\sum_{k=0}^{r} \binom{p}{k}\binom{q}{r-k}$.
Nous en déduisons la formule par unicité des coefficients d'un polynôme à coefficients réels.

2) Supposons que l'on dispose de deux ensembles A et B disjoints de cardinaux respectifs p et q. Soit $r \in [\![0, p+q]\!]$. Remarquons que choisir r élément de $A \cup B$ revient à choisir un certain nombre (disons $k \in [\![0, r]\!]$) d'éléments dans A et le reste ($r-k$ éléments) dans B. Ces k façons de choisir étant disjointes, nous obtenons la formule.

De manière plus rigoureuse, on introduit E_r l'ensemble des parties de $A \cup B$ à r éléments. On a $\operatorname{card}(E_r) = \dbinom{p+q}{r}$. Pour tout $k \in [\![0, r]\!]$, on note $F_{k,r}$ l'ensemble des couples composés d'une partie de A à k éléments et d'une partie de B à $r-k$ éléments. Nous avons $\operatorname{card}(F_{k,r}) = \dbinom{p}{k}\dbinom{q}{r-k}$. La formule de Vandermonde découle du fait que $E_r = \displaystyle\bigcup_{k=0}^{r} F_{k,r}$ est une union disjointe.

Exercice 10. Soient n et p dans $\mathbb{N}^*$. Dénombrer

1) le nombre de façons de placer p pièces identiques dans n poches différentes.
Indice : on peut coder une configuration où l'on a placé p pièces dans n poches par une succession de $\circ$ et de $|$ de la façon suivante : on place autant de $\circ$ que de pièces dans la première poche, puis on place un $|$, ensuite on place autant de $\circ$ que de pièces dans la deuxième poche, puis on place un $|$, etc. Par exemple, si on a 6 pièces et 4 poches, $\circ\circ\circ|\circ||\circ\circ$ code le fait qu'il y a 3 pièces dans la première poche, 1 pièce dans la deuxième, aucune dans la troisième et 2 dans la quatrième.
2) le nombre de façons de placer p pièces identiques dans n poches différentes de sorte qu'aucune ne soit vide.
3) le nombre de tirages successifs et avec remise de p boules dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n, sans prendre en compte l'ordre.
4) le nombre de n-uplets $(r_1, \ldots, r_n)$ d'éléments de $[\![0, p]\!]$ tels que $r_1 + \cdots + r_n = p$.
5) le nombre d'applications croissantes de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$.

Correction :

1) Il s'agit du nombre de façons de placer $n-1$ barres parmi $p+n-1$ positions possibles, c'est-à-dire $\binom{p+n-1}{n-1} = \binom{p+n-1}{p}$.
2) Si $p < n$ alors il n'est pas possible de placer les pièces de sorte qu'aucune poche ne soit vide. Supposons que $p \geqslant n$. Placer p pièces identiques dans n poches différentes de sorte qu'aucune poche ne soit vide revient à placer une pièce dans chaque poche puis de placer les $p-n$ pièces restantes dans les n poches. Il y a donc $\binom{n+(p-n)-1}{p-n} = \binom{p-1}{p-n}$ façons de placer p pièces identiques dans n poches différentes de sorte qu'aucune poche ne soit vide.
3) On tire p boules avec remise. On peut imaginer qu'il y a n poches et que l'on met les boules tirées numérotées 1 dans la poche 1, les boules tirées numérotées 2 dans la poche 2, etc. Le nombre de tirages successifs avec remise de p boules dans cette urne est donc égal au nombre de façons de placer p boules dans n poches différentes, c'est-à-dire $\binom{p+n-1}{p}$.
4) Il y a $\binom{n+p-1}{p}$ n-uplets vérifiant cette condition. En effet, remarquons que
$$p = r_1 + r_2 + \cdots + r_n = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{r_1 \text{ fois}} + \underbrace{1 + \cdots + 1}_{r_2 \text{ fois}} + \cdots + \underbrace{1 + \cdots + 1}_{r_n \text{ fois}}.$$
Ainsi on se ramène à la situation précédente : ici les 1 jouent les rôles des pièces, on a n poches et on cherche à savoir combien il y a de façons de mettre r_1 pièces dans la première poche, r_2 dans la deuxième, etc. On trouve à nouveau $\binom{p+n-1}{p}$ façons possibles.
5) Encore une fois, on peut imaginer qu'il y a n poches. Si $f : [\![1, p]\!] \longrightarrow [\![1, n]\!]$ est croissante alors, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on place autant de pièces que d'antécédents de i par f. Réciproquement si on a p pièces réparties dans n poches alors on construit une unique $f : [\![1, p]\!] \longrightarrow [\![1, n]\!]$ croissante de la façon suivante :
   - Si il y a k_1 pièces dans la première poche alors, on pose $f(1) = \cdots = f(k_1) = 1$,
   - Si il y a k_2 pièces dans la deuxième poche alors, on pose $f(k_1+1) = \cdots = f(k_1+k_2) = 1$, etc

On trouve à nouveau $\binom{p+n-1}{p}$ façons possibles.

Exercice 11 – Mains au poker fermé. Dans un jeu de carte, toute carte possède une couleur ($\clubsuit$, $\spadesuit$, $\diamondsuit$ ou $\heartsuit$) et un rang (un numéro ou une figure). On tire cinq cartes d'un jeu de $4r$ cartes avec $r \in \mathbb{N}^*$ (si $r = 13$, il s'agit d'un jeu de 52 cartes et, si $r = 8$, il s'agit d'un jeu de 32 cartes[1]). On obtient ce qu'on appelle une main.

1) Calculer le nombre total de mains possibles.
2) Combien y a-t-il de mains possibles avec (dans l'ordre de leurs forces au poker fermé) :
   a) une **quinte flush** (cinq cartes de la même couleur et de rangs consécutifs) ?
   On introduira $s(r)$ le nombre de suites de rangs consécutifs possibles. On a $s(13) = 10$ et $r(8) = 4$.
   b) un **carré** (quatre cartes de même rang et une cinquième carte quelconque) ?
   c) un **full** (trois cartes de même rang et deux autres cartes de même rang) ?
   d) une **couleur** (cinq cartes de même couleur dont les rangs ne sont pas consécutifs) ?
   e) une **quinte** (cinq cartes de rangs consécutifs et qui ne sont pas toutes de la même couleur) ?
   f) un **brelan** (trois cartes de même rang et deux cartes de rangs distincts deux à deux et différents de celui des trois premières cartes) ?
   g) une **double paire** (deux cartes de même rang, deux autres cartes de même rang mais différent de celui des deux premières cartes et une cinquième carte de rang différent des deux précédents) ?
   h) une **paire** (deux cartes de même rang et trois autres de rangs distincts deux à deux et différent de celui la paire) ?
   i) une **carte haute** (cinq cartes n'étant pas toutes de la même couleur, de rangs distincts deux à deux et non consécutifs) ?

Correction :

1) Choisir une main revient à choisir 5 cartes distinctes parmi les $4r$ cartes, sans ordre. Il y a donc $\boxed{\binom{4r}{5}}$ mains possibles ($= 2598960100$ si $r = 13$ et $= 201376$ si $r = 8$).
2) Pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, notons $s(r)$ le nombre de suites de rangs consécutifs possibles.
   - On a $s(8) = 4$. En effet les suites possibles sont alors 7-8-9-10-J, 8-9-10-J-Q, 9-10-J-Q-K et 10-J-Q-K-A.
   - On a $s(13) = 10$. En effet les suites possibles sont les quatre précédentes ainsi que les suites A-2-3-4-5-6, 2-3-4-5-6, 3-4-5-6-7, 4-5-6-7-8, 5-6-4-7-8, 6-7-8-9-10.

   L'idée pour compter facilement le nombre de mains possibles d'un type donné est de remarquer que, pour choisir une main, on peut choisir d'abord les rangs des cartes puis leur couleur (ou l'inverse).

   a) Choisir une quinte flush revient à choisir la couleur (4 choix) puis la suite ($s(r)$ choix). Ainsi il y a $\boxed{4s(r)}$ choix de mains avec une quinte flush ($= 40$ si $r = 13$ et 16 si $r = 8$).
   Parmi elles, il y a quatre quintes flush royales : $10\clubsuit - J\clubsuit - Q\clubsuit - K\clubsuit - A\clubsuit$, $10\spadesuit - J\spadesuit - Q\spadesuit - K\spadesuit - A\spadesuit$, $10\diamondsuit - J\diamondsuit - Q\diamondsuit - K\diamondsuit - A\diamondsuit$ *et* $10\heartsuit - J\heartsuit - Q\heartsuit - K\heartsuit - A\heartsuit$.
   b) Choisir un carré revient à choisir le rang des quatre cartes de même couleur (r choix) puis de choisir une des cartes restantes ($4r - 4$ choix). Ainsi il y a $\boxed{4r(r-1)}$ choix de mains avec un carré ($= 624$ si $r = 13$ et 224 si $r = 8$).
   c) Choisir un full revient à choisir :
      - le rang des trois cartes de même rang (r choix) puis trois cartes parmi les quatre possibles ayant ce rang ($\binom{4}{3} = 4$ choix),
      - le rang des deux cartes de même rang ($r - 1$ choix puisqu'on ne peut bien sûr plus choisir le même rang que précédemment) puis deux cartes parmi les quatre possibles ayant ce rang ($\binom{4}{2} = 6$ choix).

   Ainsi il y a $\boxed{24r(r-1)}$ choix de mains avec un full ($= 3744$ si $r = 13$ et 1344 si $r = 8$).

1. Pour obtenir un jeu de 32 cartes à partir d'un jeu de 52 cartes, on enlève toutes les cartes numérotées 2, 3, 4, 5 ou 6.

d) Choisir une couleur revient à choisir la couleur des cinq cartes (4 choix) puis cinq cartes ayant cette couleur mais ne formant pas une suite ($\binom{r}{5} - s(r)$ choix). Ainsi il y a $\boxed{4\binom{r}{5} - 4s(r)}$ choix de mains avec une couleur ($= 5108$ si $r = 13$ et 208 si $r = 8$).

e) Choisir une quinte revient à choisir la suite ($s(r)$ choix) puis cinq cartes ayant ces rangs mais n'étant pas tous de la même couleur (4 choix pour chaque carte moins les 4 combinaisons où les cinq cartes sont de la même couleur, soit $4^5 - 4 = 1020$ en tout). Ainsi il y a $\boxed{1020s(r)}$ choix de mains avec une quinte ($= 10200$ si $r = 13$ et 4080 si $r = 8$).

f) Choisir un brelan revient à choisir :

- le rang des trois cartes de même rang (r choix) puis trois cartes parmi les quatre possibles ayant ce rang ($\binom{4}{3} = 4$ choix),
- les rangs des deux dernières cartes ($\binom{r-1}{2} = \frac{(r-1)(r-2)}{2}$ car on ne peut pas choisir le même rang que précédemment et leurs rangs doivent être distincts afin de ne pas former un full) puis leurs couleurs respectives (4^2 choix).

Ainsi il y a $\boxed{32r(r-1)(r-2)}$ mains possibles avec un brelan ($= 54912$ si $r = 13$ et 10752 si $r = 8$).

g) Choisir une double paire revient à choisir :

- les rangs des deux paires ($\binom{r}{2}$ choix) puis, pour chaque paire, deux cartes parmi les quatre possibles ayant ce rang ($\binom{4}{2} = 6$ choix),
- la dernière carte qui doit être d'un rang différent ($4r - 8$ choix).

Ainsi il y a $\boxed{72r(r-1)(r-2)}$ mains possibles avec une double paire ($= 123552$ si $r = 13$ et 24192 si $r = 8$).

h) Choisir une paire revient à choisir :

- le rang des deux premières cartes (r choix) puis deux cartes parmi les quatre possibles ayant ce rang ($\binom{4}{2} = 6$ choix),
- les rangs des trois dernières cartes ($\binom{r-1}{3} = \frac{(r-1)(r-2)(r-3)}{6}$ car on ne peut pas choisir le même rang que précédemment et leurs rangs doivent être distincts afin de ne pas former un brelan ou une double paire) puis leurs couleurs respectives (4^3 choix).

Ainsi il y a $\boxed{64r(r-1)(r-2)(r-3)}$ mains possibles avec une paire ($= 1098240$ si $r = 13$ et 107520 si $r = 8$).

i) Choisir une carte haute revient à choisir le rang des cinq cartes ($\binom{r}{5} - s(r)$ car les rangs doivent être distincts et ne pas former une suite) puis la couleur des cartes (4 choix pour chaque carte moins les 4 combinaisons où les cinq cartes sont de la même couleur, soit $4^5 - 4 = 1020$ en tout). Ainsi il y a $\boxed{1020\left(\binom{r}{5} - s(r)\right)}$ mains possibles avec une carte haute ($= 1302540$ si $r = 13$ et 53040 si $r = 8$).
